

DALLE AUTOSTRADE DIGITALI ALLE AUTOSTRADE REALI: GRAFI, WEB, FACEBOOK E NAVIGATORI SATELLITARI

ALBERTO DENNUNZIO

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA, SISTEMISTICA E COMUNICAZIONE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

DENNUNZIO@DISCO.UNIMIB.IT





Remember Me

[Forgot your password?](#)

Email

Login

**Facebook helps you connect and share with
the people in your life.**



Sign Up
It's free and anyone can join

Full Name:

Your Email:

New Password:

I am:

Birthday:

[Why do I need to provide this?](#)

To create a page for a celebrity, band or business, [click here.](#)





Milano-Viale Certosa



A4/E64 Autostrada Torino-Milano

19.5 KM

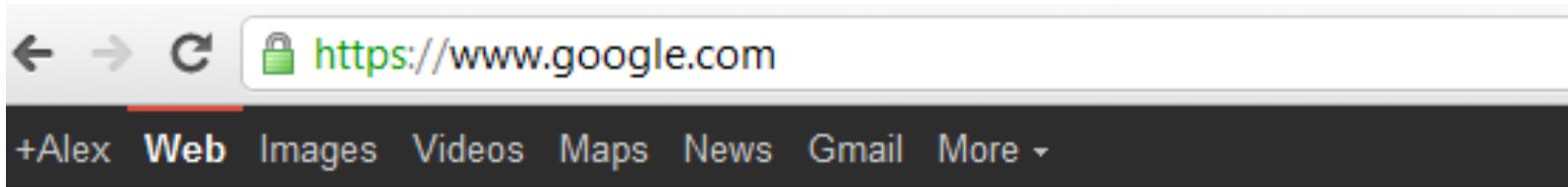
129 / 130



1.7
KM

0:17 H
18:01 *





Google

A large, empty search input field with a blue border. A small microphone icon is positioned in the top right corner of the field.

Google Search

I'm Feeling Lucky



GRAFO (ORIENTATO)



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** V

insieme di **archi** E



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

insieme di **archi** E

1

3

5

2

4



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

insieme di **archi** $E = \{(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(5,4),(5,5)\}$

1

3

5

2

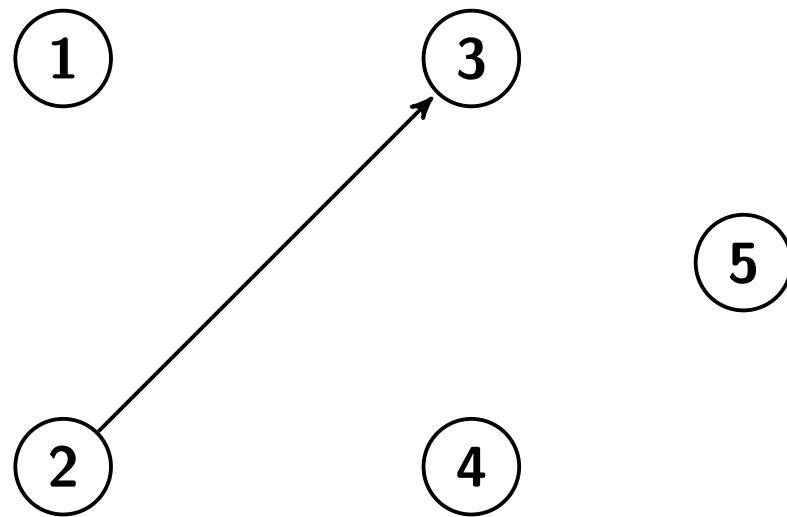
4



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

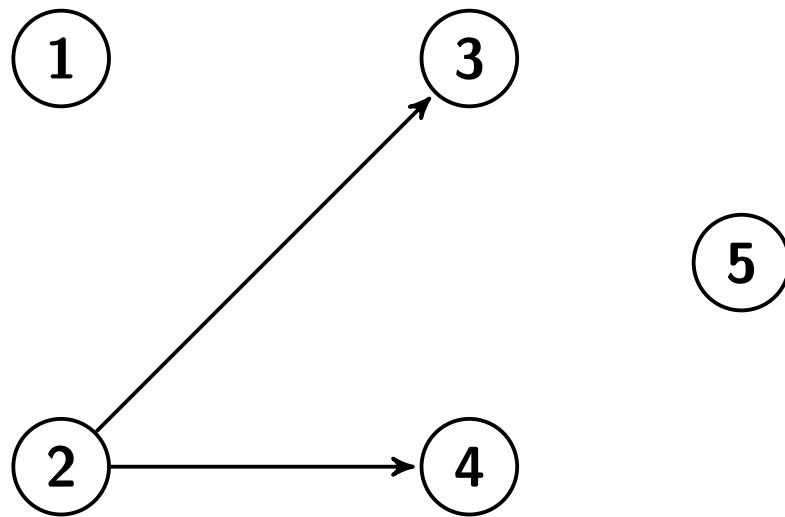
insieme di **archi** $E = \{(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(5,4),(5,5)\}$



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

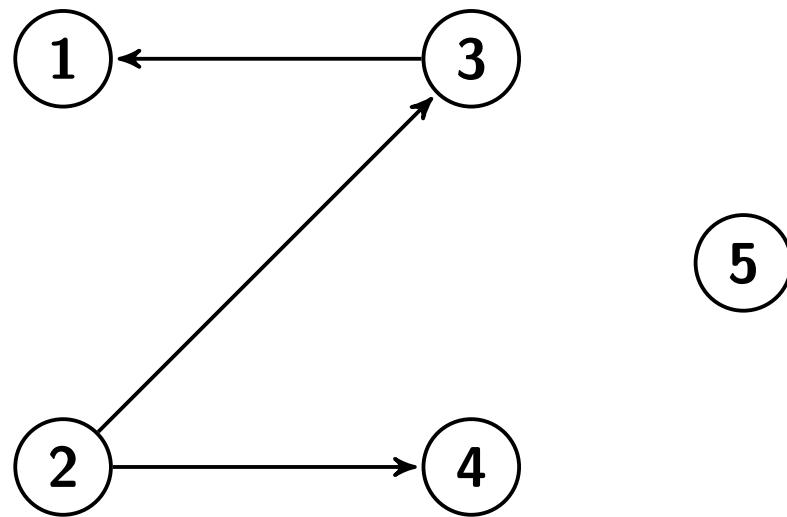
insieme di **archi** $E = \{(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(5,4),(5,5)\}$



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

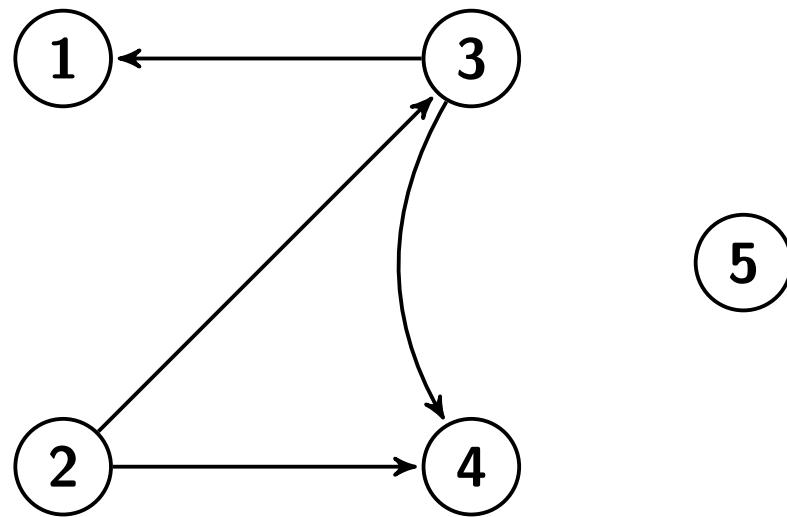
insieme di **archi** $E = \{(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(5,4),(5,5)\}$



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

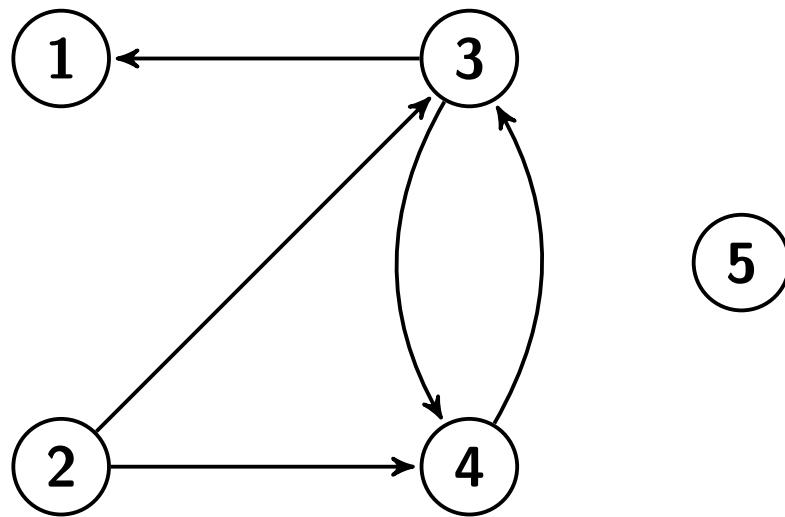
insieme di **archi** $E = \{(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(5,4),(5,5)\}$



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

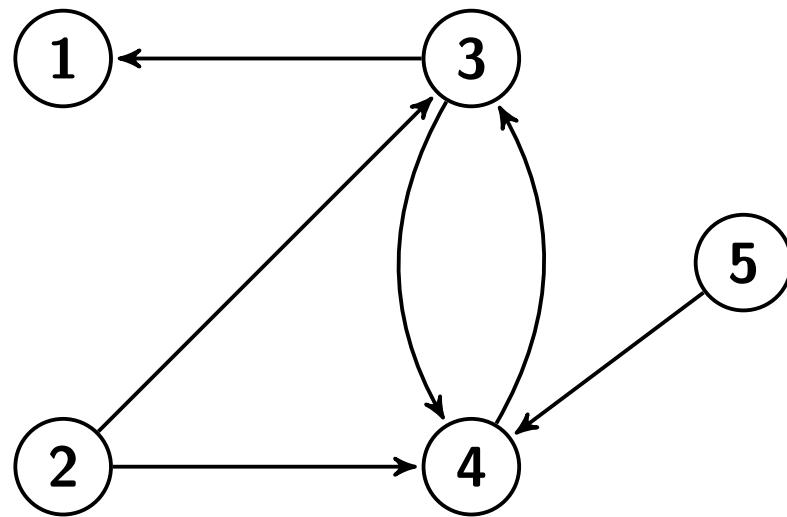
insieme di **archi** $E = \{(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(5,4),(5,5)\}$



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

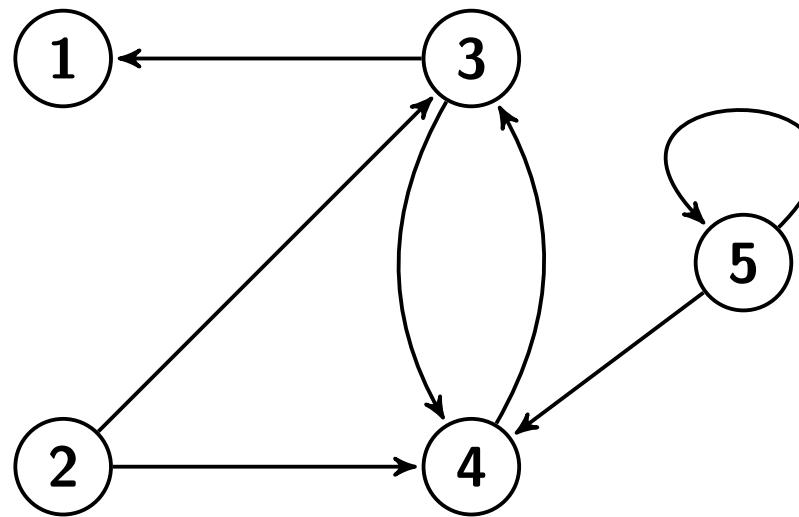
insieme di **archi** $E = \{(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(5,4),(5,5)\}$



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

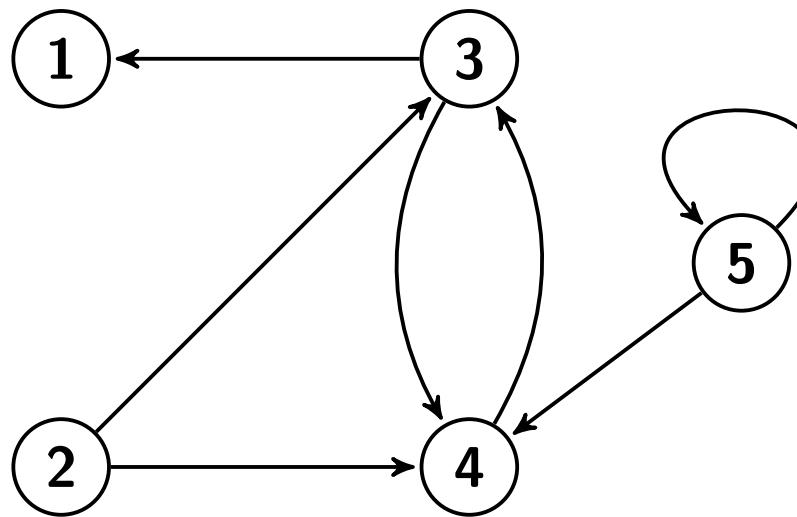
insieme di **archi** $E = \{(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(5,4),(5,5)\}$



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

insieme di **archi** $E = \{(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(5,4),(5,5)\}$



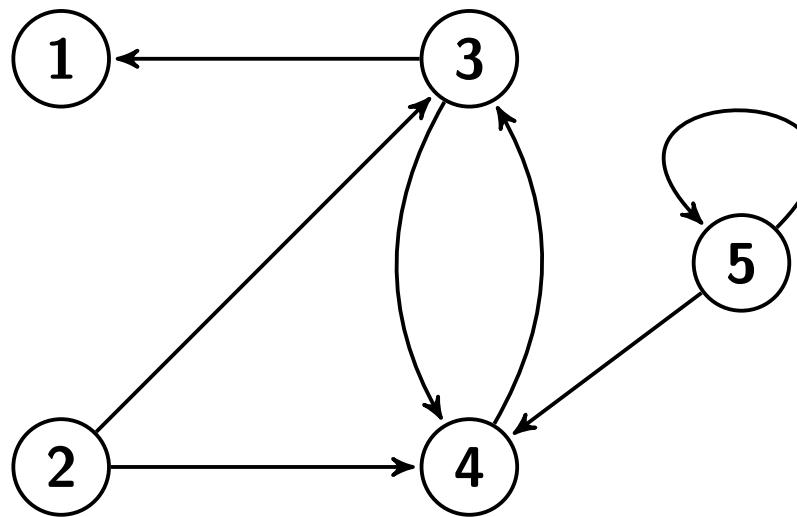
$$E \subseteq V \times V !!$$



GRAFO (ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

insieme di **archi** $E = \{(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(5,4),(5,5)\}$



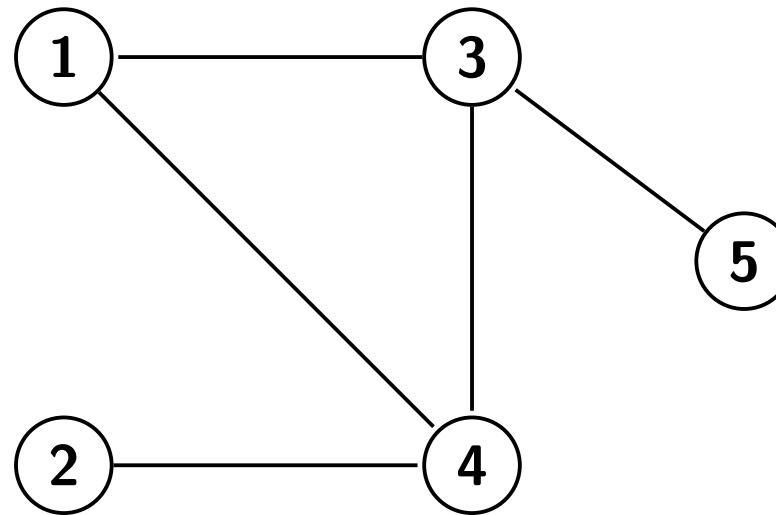
$E \subseteq V \times V$!! E è una **relazione binaria** definita su V



GRAFO (NON ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

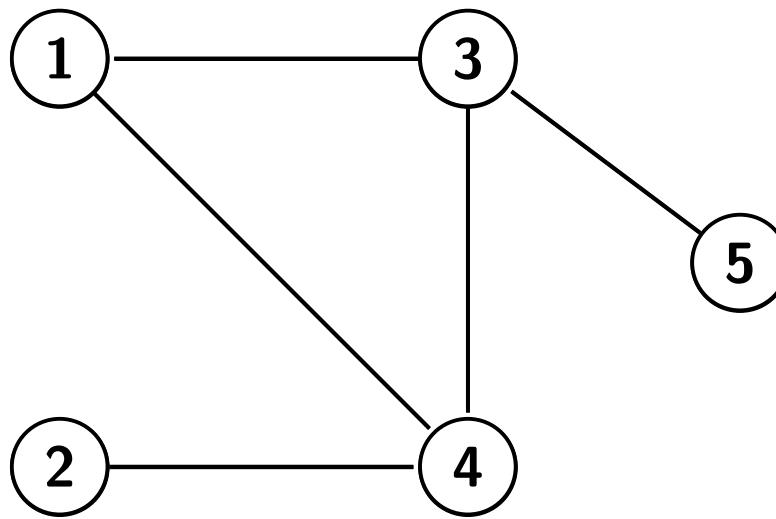
insieme di **archi** $E = \{(1,3),(3,1), \dots\}$



GRAFO (NON ORIENTATO)

insieme di **vertici** $V = \{1,2,3,4,5\}$

insieme di **archi** $E = \{(1,3),(3,1), \dots\}$

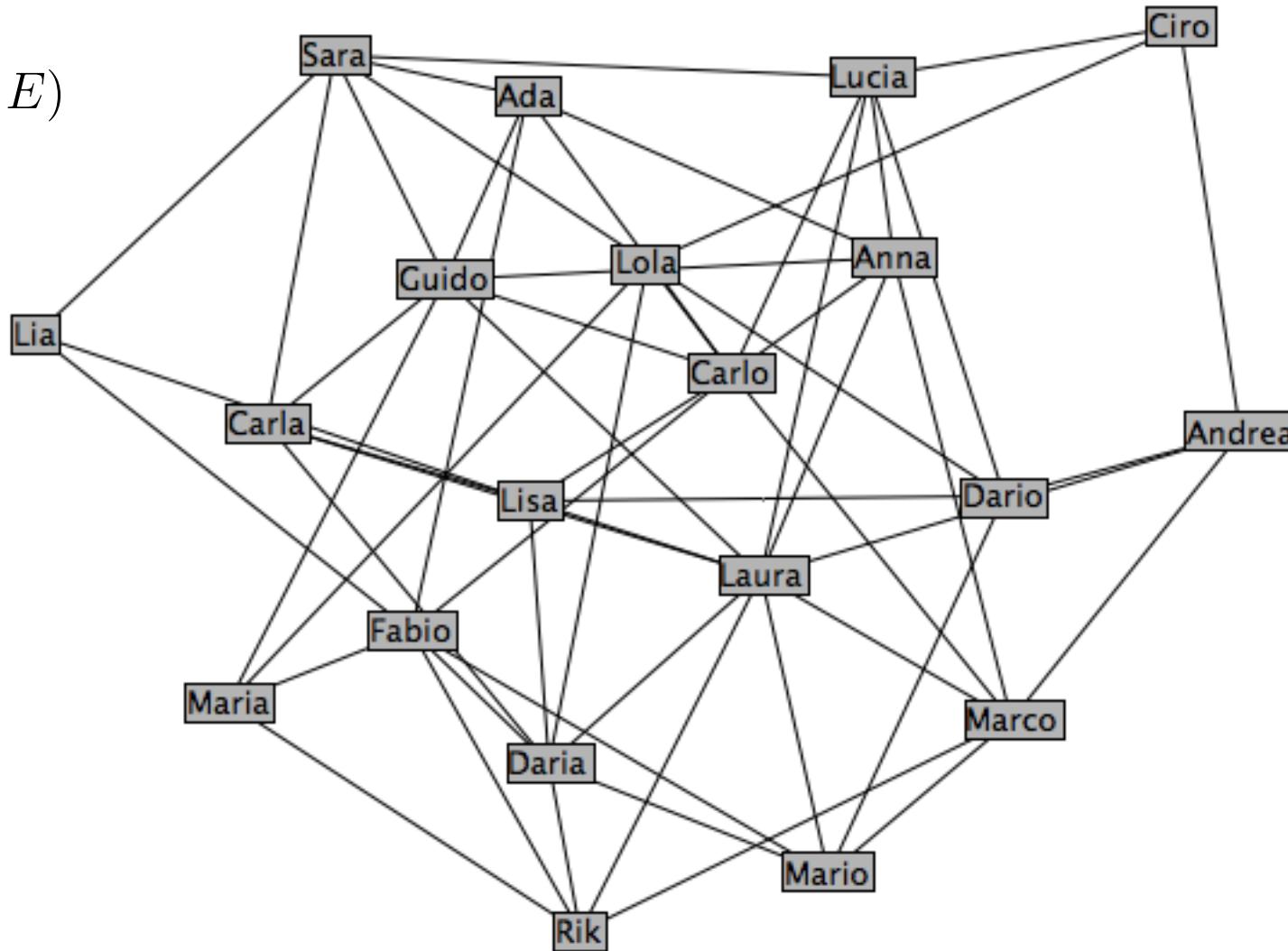


E è una **relazione binaria simmetrica**

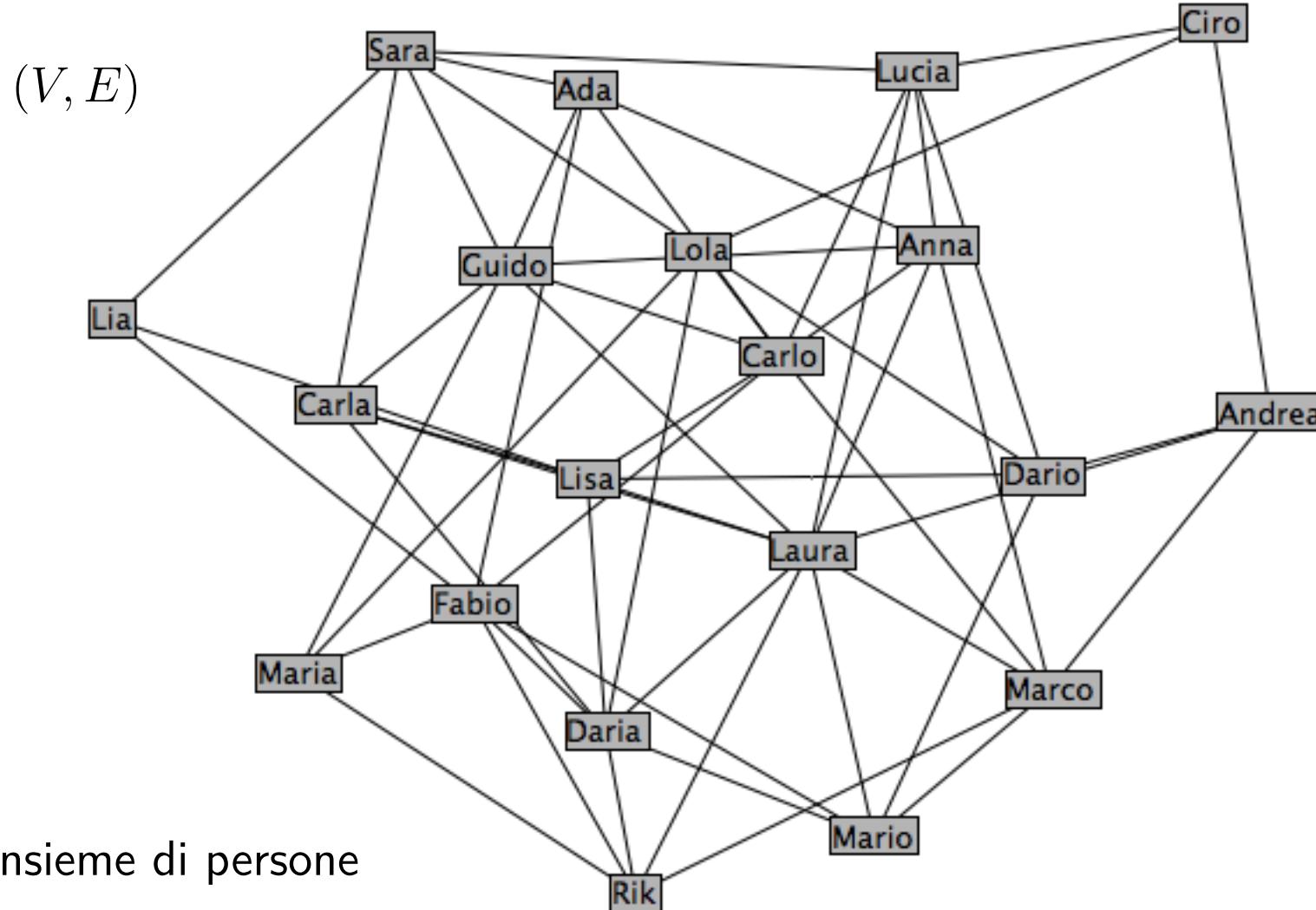


GRAFO DI UNA RETE SOCIALE

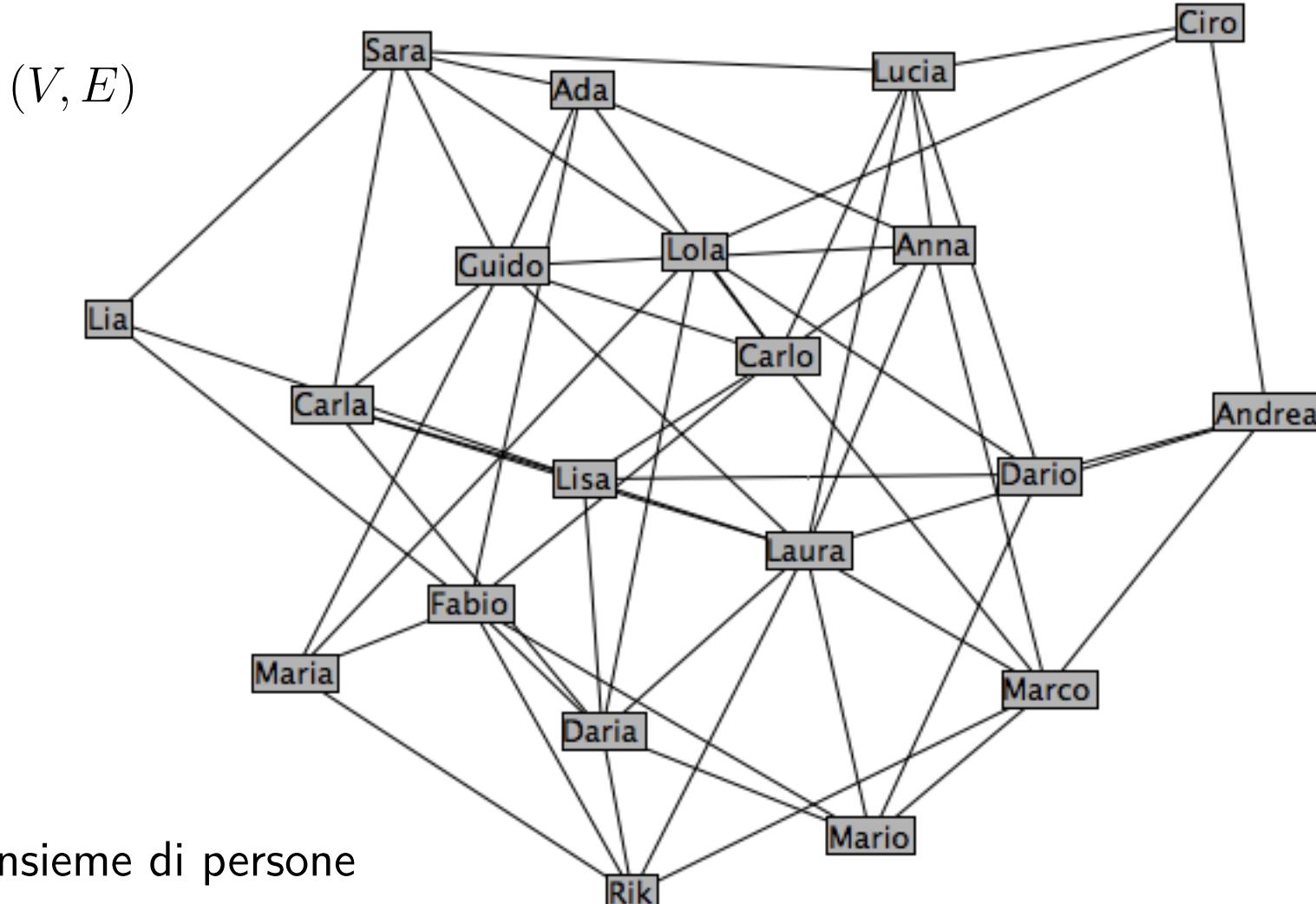
$$(V, E)$$



GRAFO DI UNA RETE SOCIALE



GRAFO DI UNA RETE SOCIALE



GRAFO DI FACEBOOK



- 1.55 miliardi di utenti (vertici)
- ~> 200 miliardi di amicizie (archi)

GRAFO DI FACEBOOK

$$(V, E, f, g)$$

V insieme di vertici (utenti)

$E \subseteq V \times V$ insieme di archi (amicizie)

$f : V \rightarrow X$ ad ogni utente associa informazioni

$X = A_1 \times A_2 \times \dots$ (A_1 insieme di nomi, A_2 insieme di cognomi, ...)

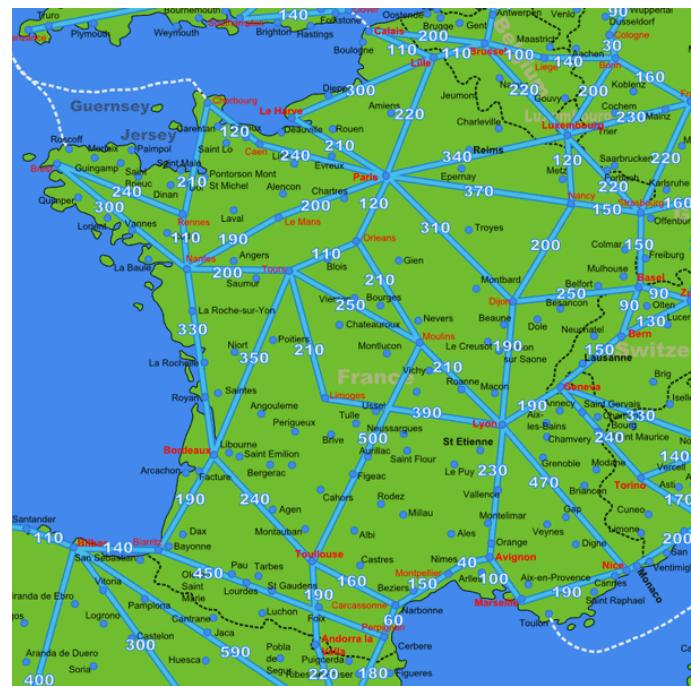
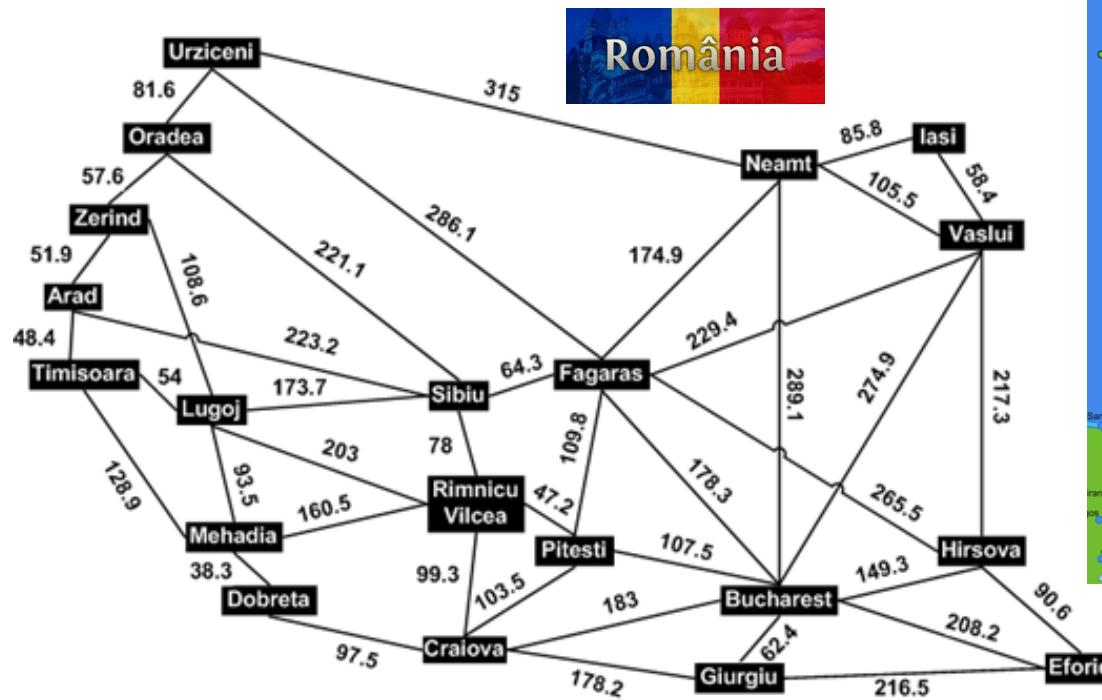
$g : E \rightarrow Y$ ad ogni amicizia associa informazioni

$Y = B_1 \times B_2 \times \dots$ (B_1 insieme di date, ...)



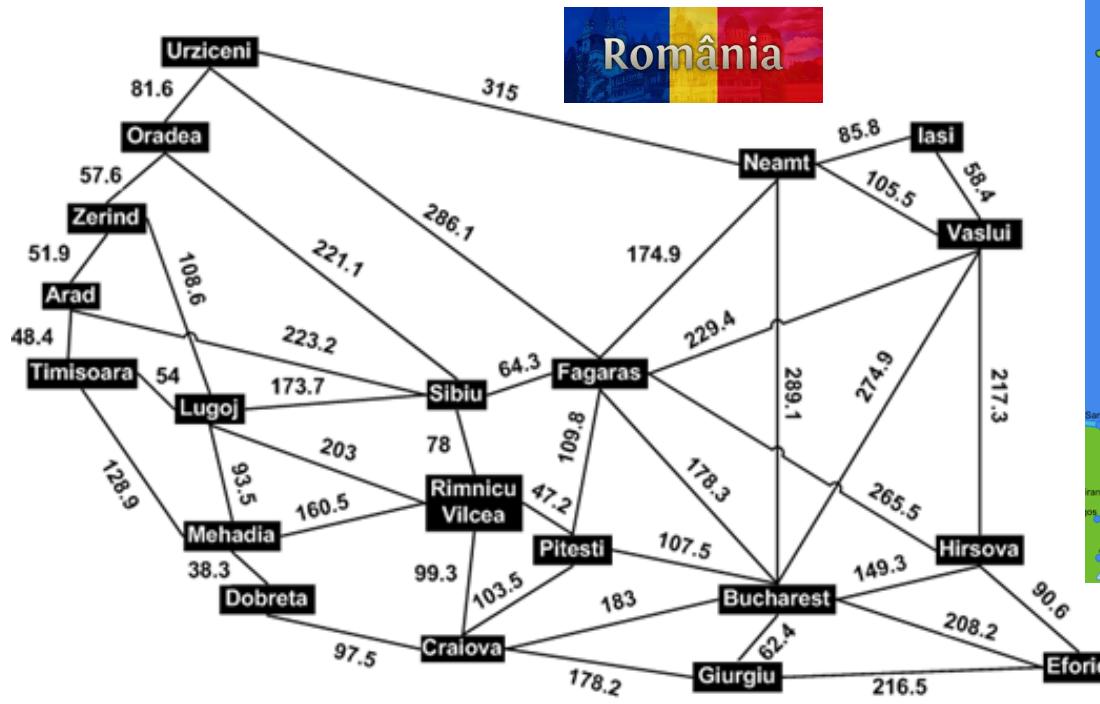
GRAFO DI UNA RETE STRADALE

$$(V, E, w)$$

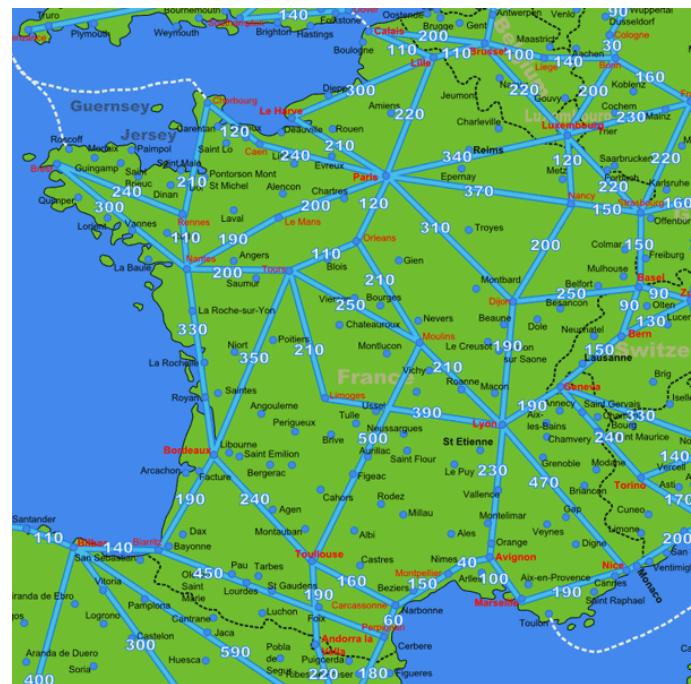


GRAFO DI UNA RETE STRADALE

$$(V, E, w)$$

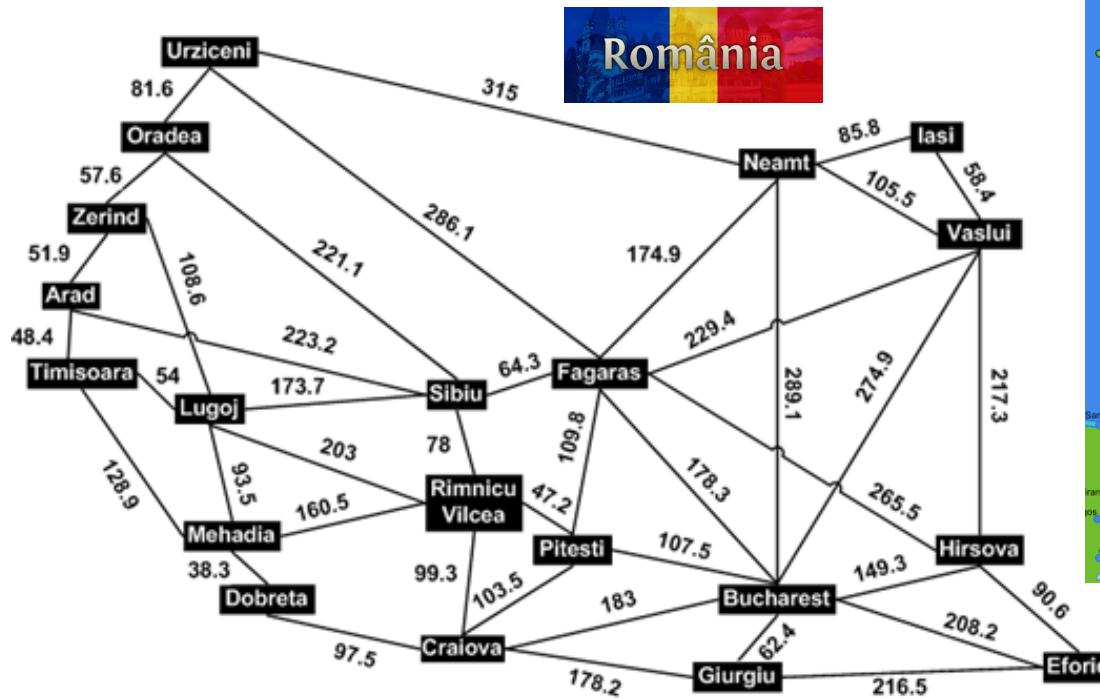


V insieme di città



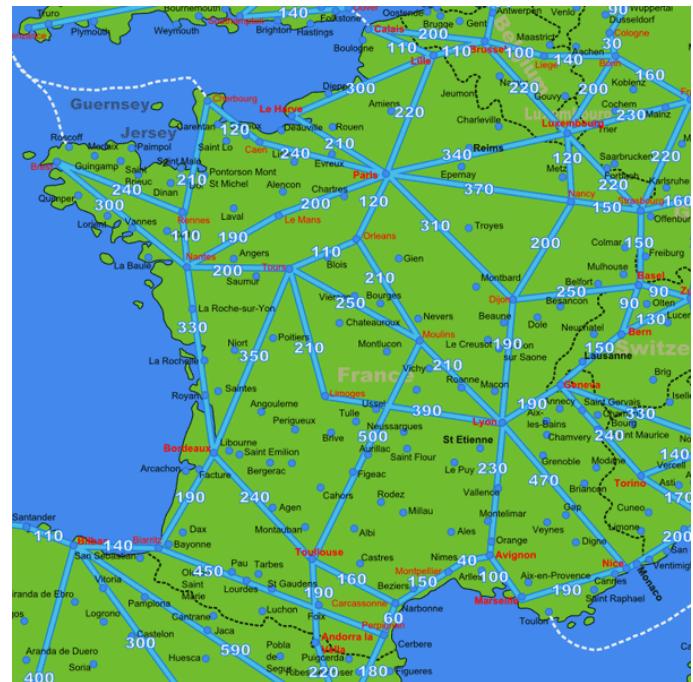
GRAFO DI UNA RETE STRADALE

$$(V, E, w)$$



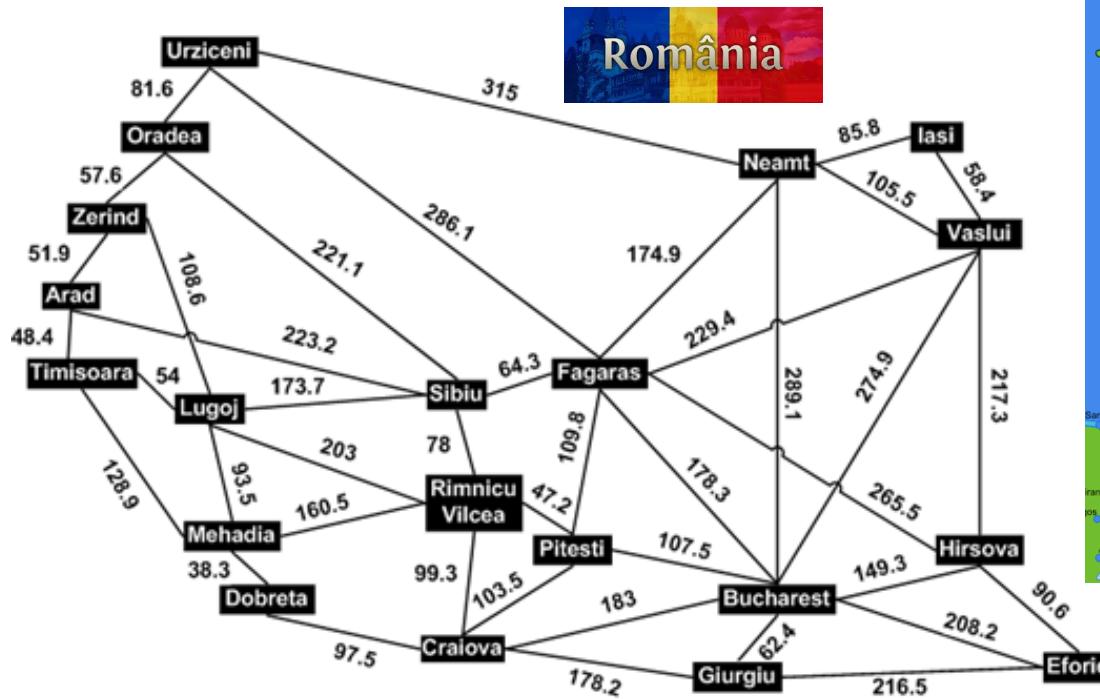
V insieme di città

E insieme di coppie di città (collegamenti stradali)



GRAFO DI UNA RETE STRADALE

(V, E, w)

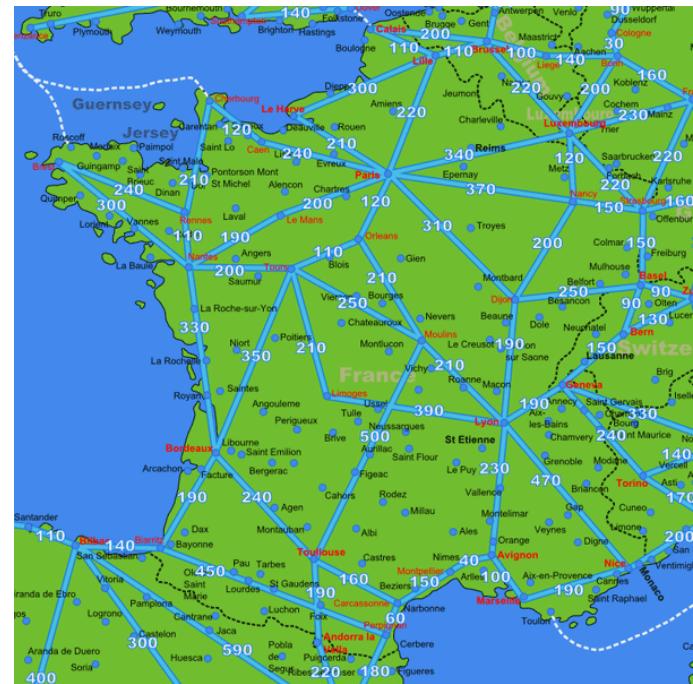


V insieme di città

E insieme di coppie di città (collegamenti stradali)

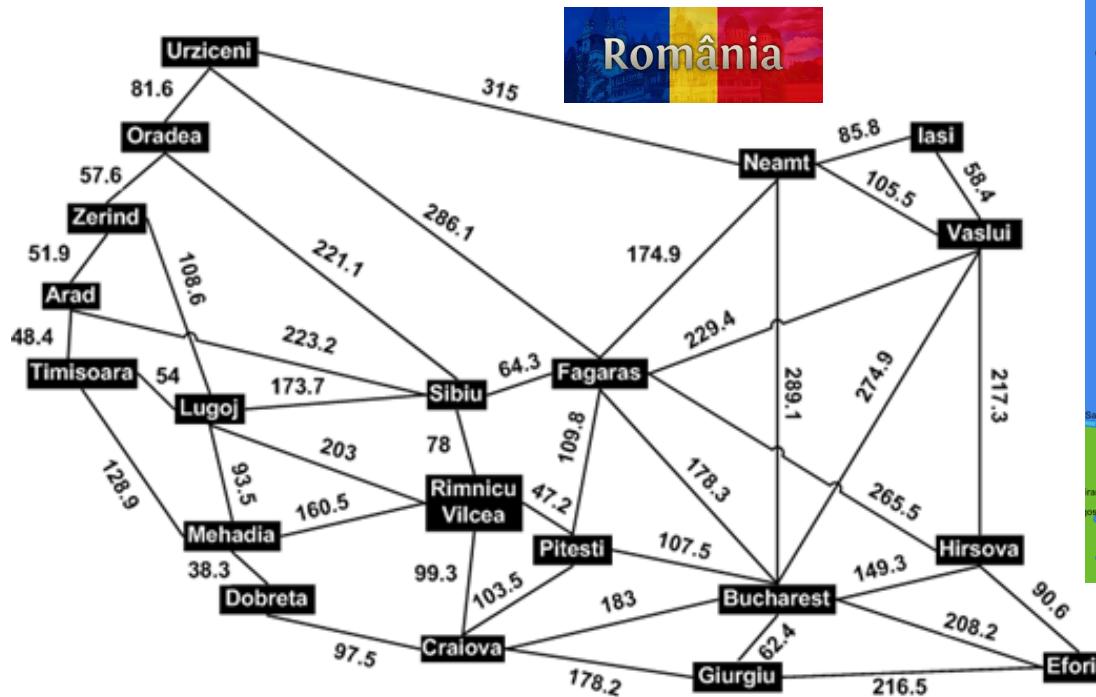
$w : E \rightarrow \mathbb{R}$

funzione peso, associa ad ogni coppia di città un valore



GRAFO DI UNA RETE STRADALE

$$(V, E, w)$$

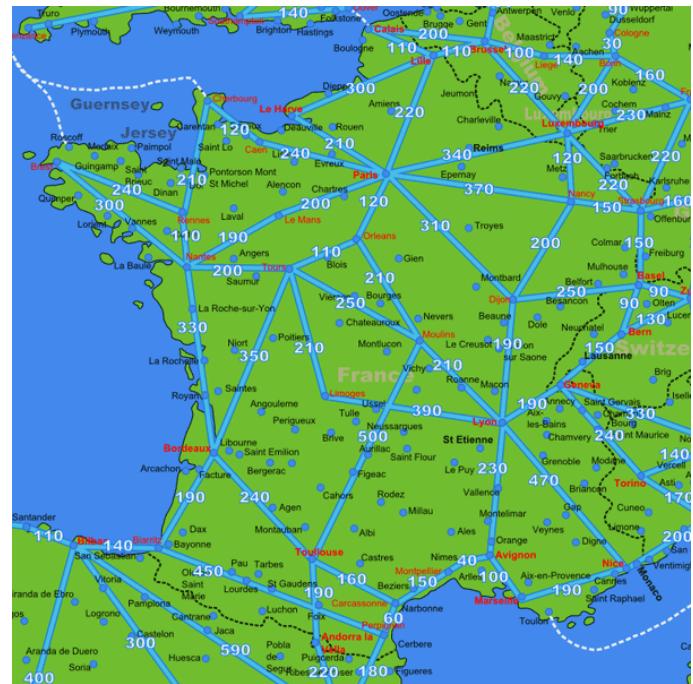


V insieme di città

E insieme di coppie di città (collegamenti stradali)

$w : E \rightarrow \mathbb{R}$ funzione peso, associa ad ogni coppia di città un valore

$$w(\text{Craiova}, \text{Bucharest}) = 183$$



ALGORITMI SU GRAFI

Perchè i navigatori funzionano?

Perchè le Apps di Facebook funzionano?



ALGORITMI SU GRAFI

Perchè i navigatori funzionano?

Perchè le Apps di Facebook funzionano?

Algoritmi su grafi per

- calcolo di cammini (percorsi) minimi tra vertici
- stabilire la raggiungibilità tra vertici
- ...



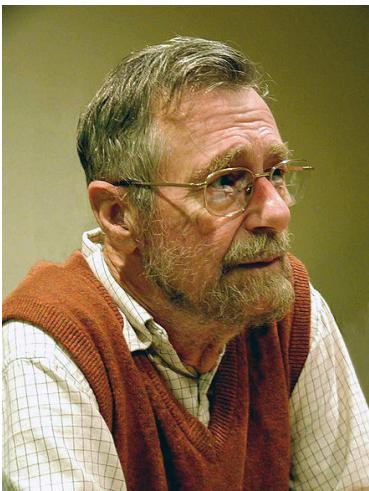
ALGORITMI SU GRAFI

Perchè i navigatori funzionano?

Perchè le Apps di Facebook funzionano?

Algoritmi su grafi per

- calcolo di cammini (percorsi) minimi tra vertici
- stabilire la raggiungibilità tra vertici
- ...



Algoritmo di Dijkstra (1956)

Inizializzazione

```
F = {S} ;  
per ogni nodo v:  
se v adiacente S allora  
allora dist(v) = costo(S,v)  
altrimenti dist(v) = infinito ;
```

Ripeti fino a quando F non contiene tutti i nodi :

```
{  
fra tutti i nodi non in F scegli quello w per cui dist (w) e' minimo ;  
aggiungi w a F;  
per ogni nodo v adiacente a w e non in F:  
dist(v) = minimo( dist(v), dist(w) + costo(w,v) )  
/* il costo del cammino per arrivare a v e' aggiornato  
perche' il cammino di costo minimo o rimane quello  
vecchio o passa attraverso w */  
}
```

OPS... IL GRAFO È ENORME

hollywood-2011

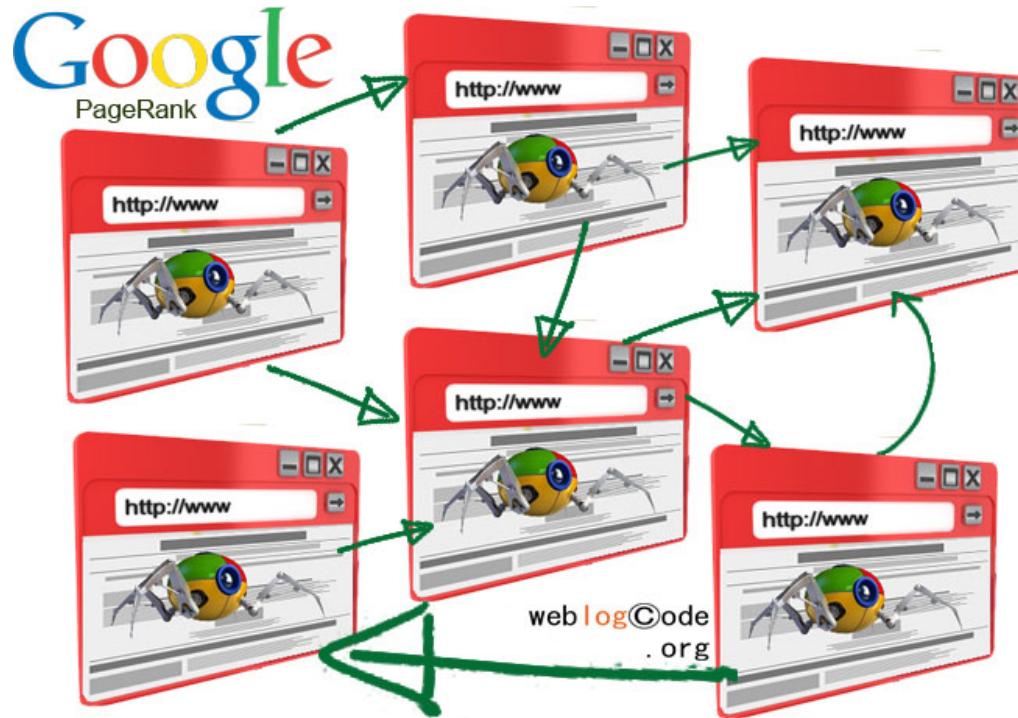
- 2.18 milioni di vertici
- 229 milioni di archi



BFS richiede 49 minuti!
(usando RAM di 2.5 Gb)



GRAFO DEL WEB



GRAFO DEL WEB



V insieme delle pagine web

$(i, j) \in E$ se la pagina i contiene un link alla pagina j

[la pagina i cita la pagina j]

COME GOOGLE ORDINA LE PAGINE?



COME GOOGLE ORDINA LE PAGINE?



COME GOOGLE ORDINA LE PAGINE?

Fondatori di Google (1998)



Larry Page



Sergey Brin



COME GOOGLE ORDINA LE PAGINE?



COME GOOGLE ORDINA LE PAGINE? PAGERANK...

Una pagina è importante se viene citata da altre pagine importanti



COME GOOGLE ORDINA LE PAGINE? PAGERANK...

Una pagina è importante se viene citata da altre pagine importanti

Per calcolare l'importanza di una pagina, PageRank usa:

- numero di link ricevuti dalla pagina
- importanza delle pagine sorgenti che contengono il link alla pagina
- numero di link contenuti nelle pagine sorgenti



COME GOOGLE ORDINA LE PAGINE? PAGERANK...

Una pagina è importante se viene citata da altre pagine importanti

Per calcolare l'importanza di una pagina, PageRank usa:

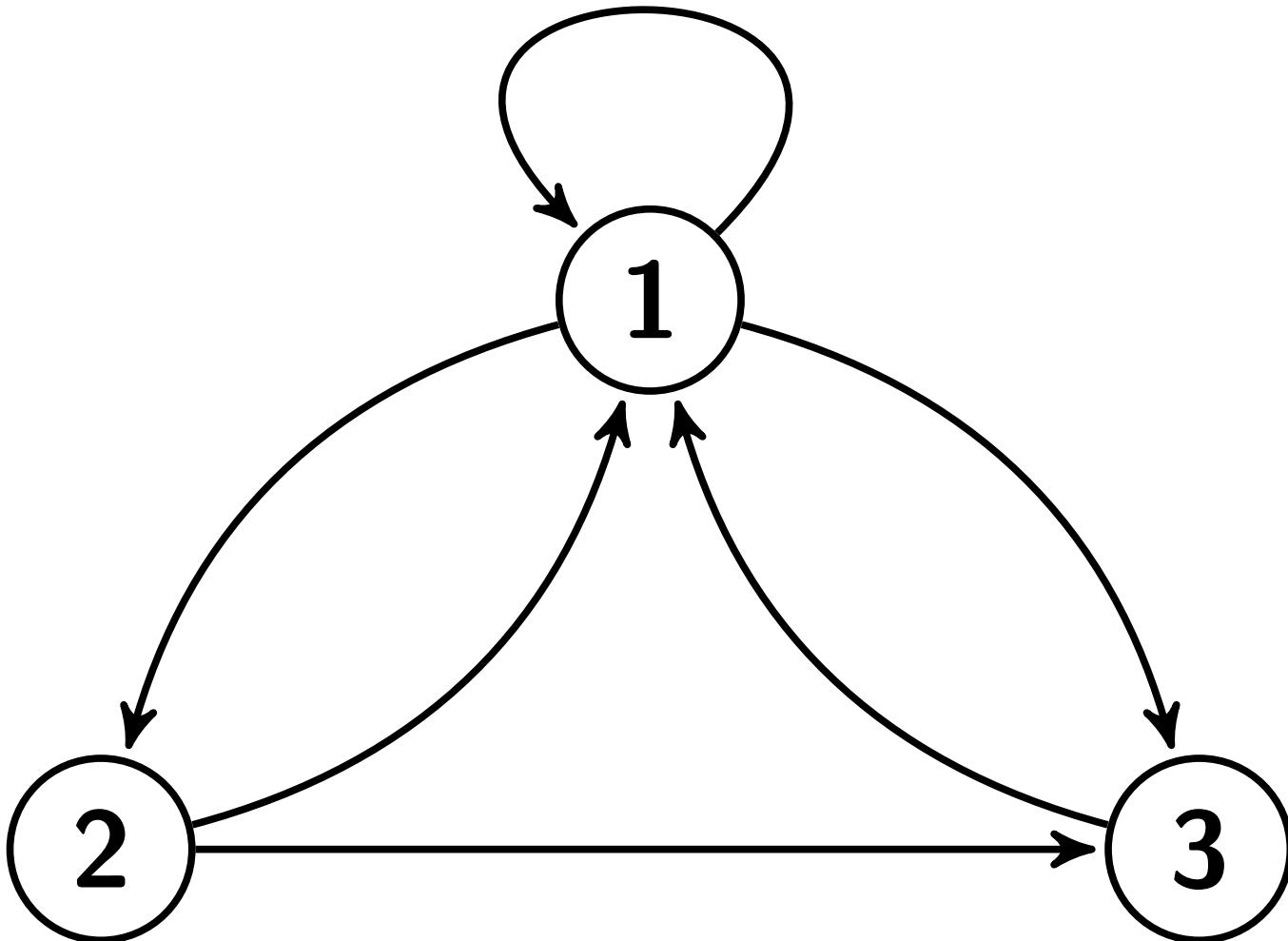
- numero di link ricevuti dalla pagina
- importanza delle pagine sorgenti che contengono il link alla pagina
- numero di link contenuti nelle pagine sorgenti

Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

L'importanza di una pagina è la somma della importanze ricevute dalle pagine che la citano

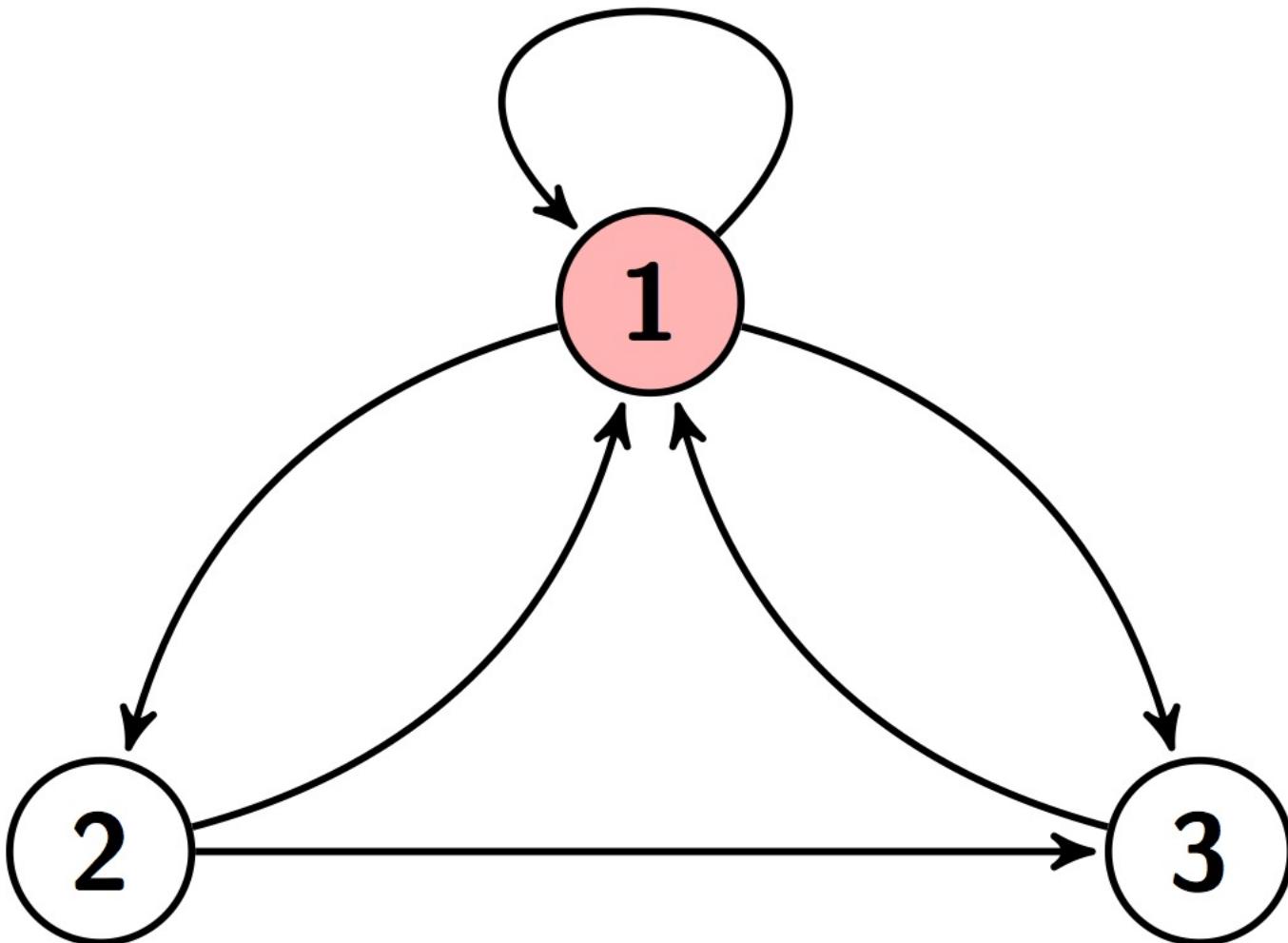


CALCOLO DELLE IMPORTANZE



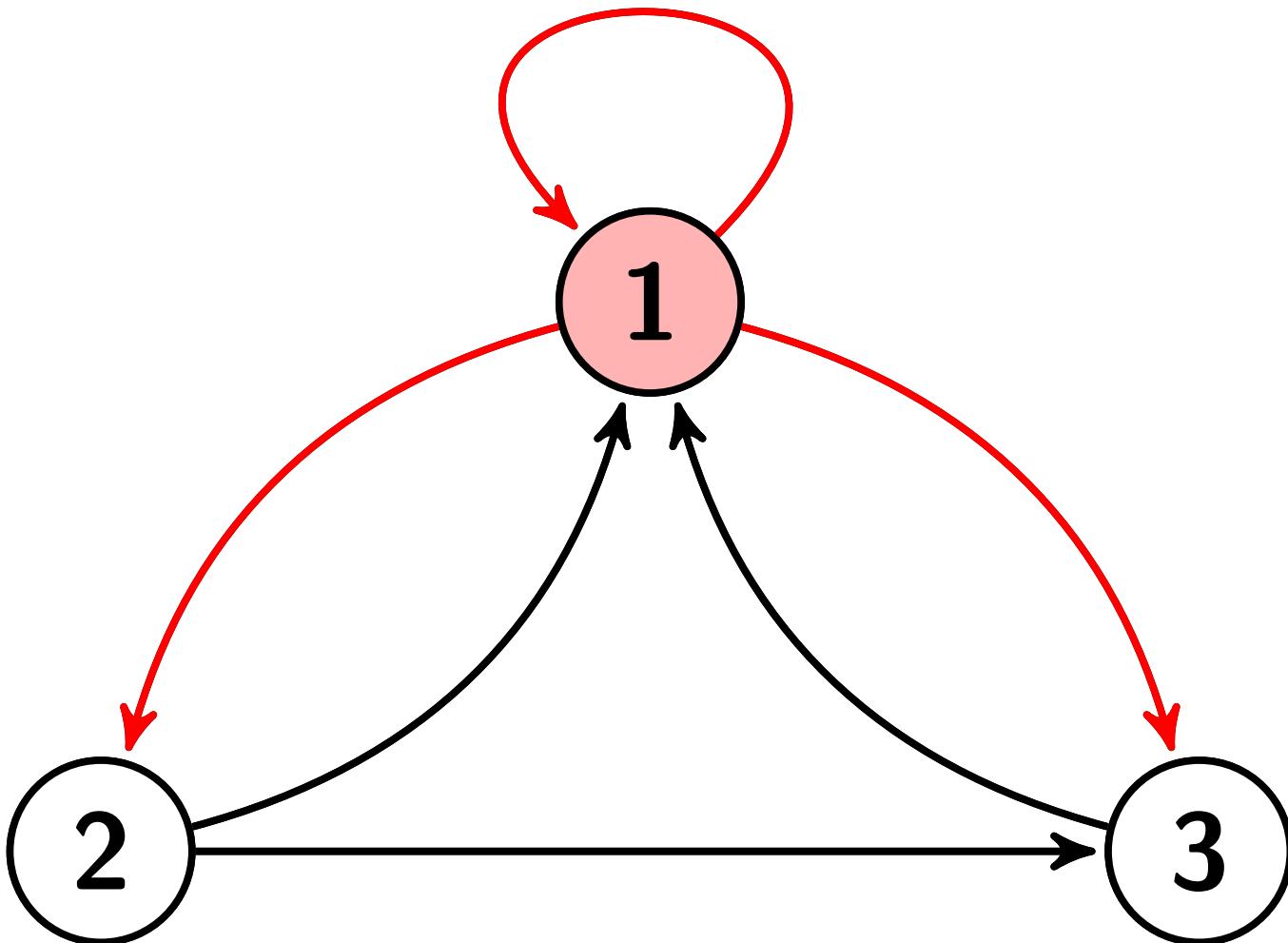
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



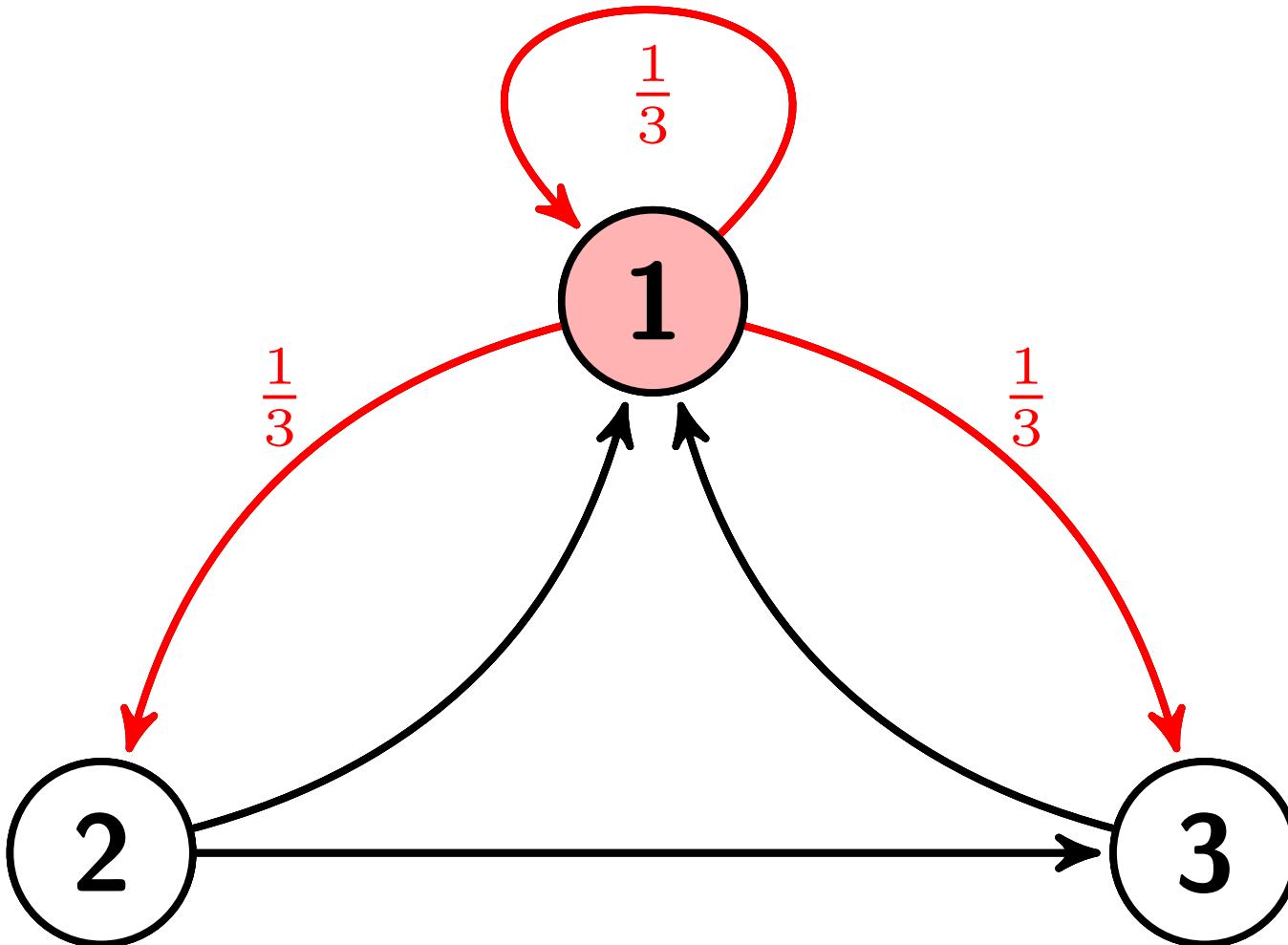
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



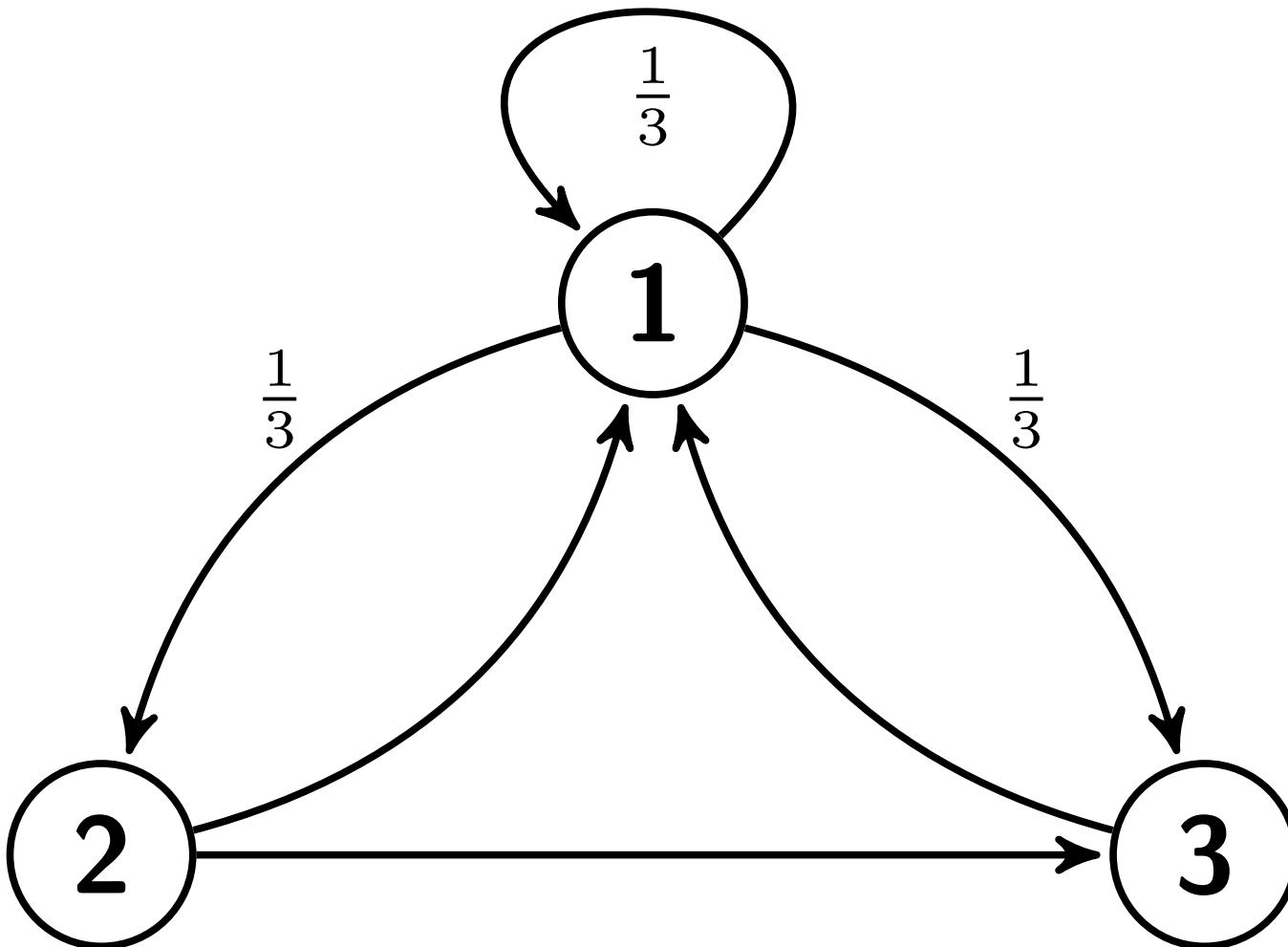
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



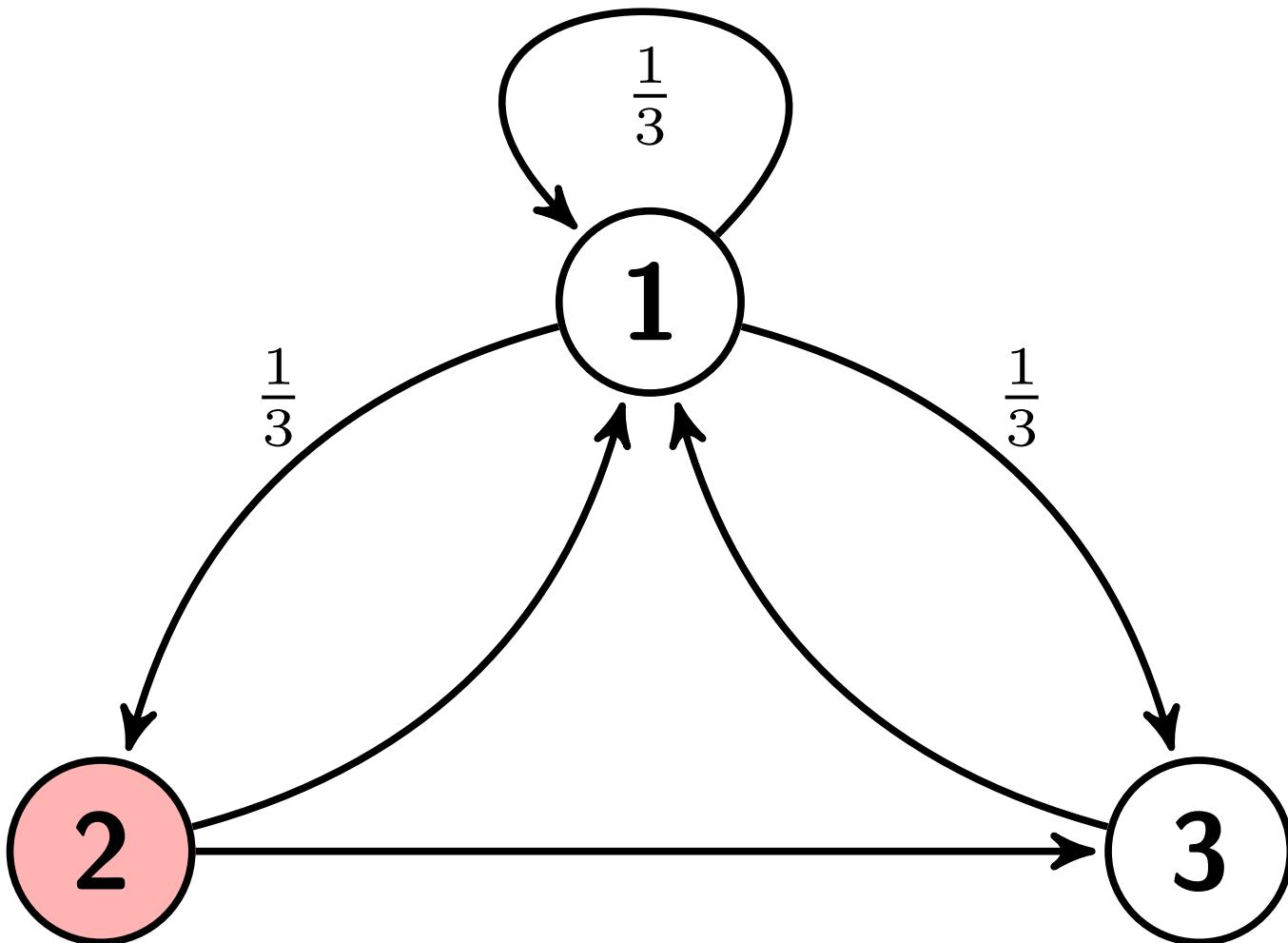
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



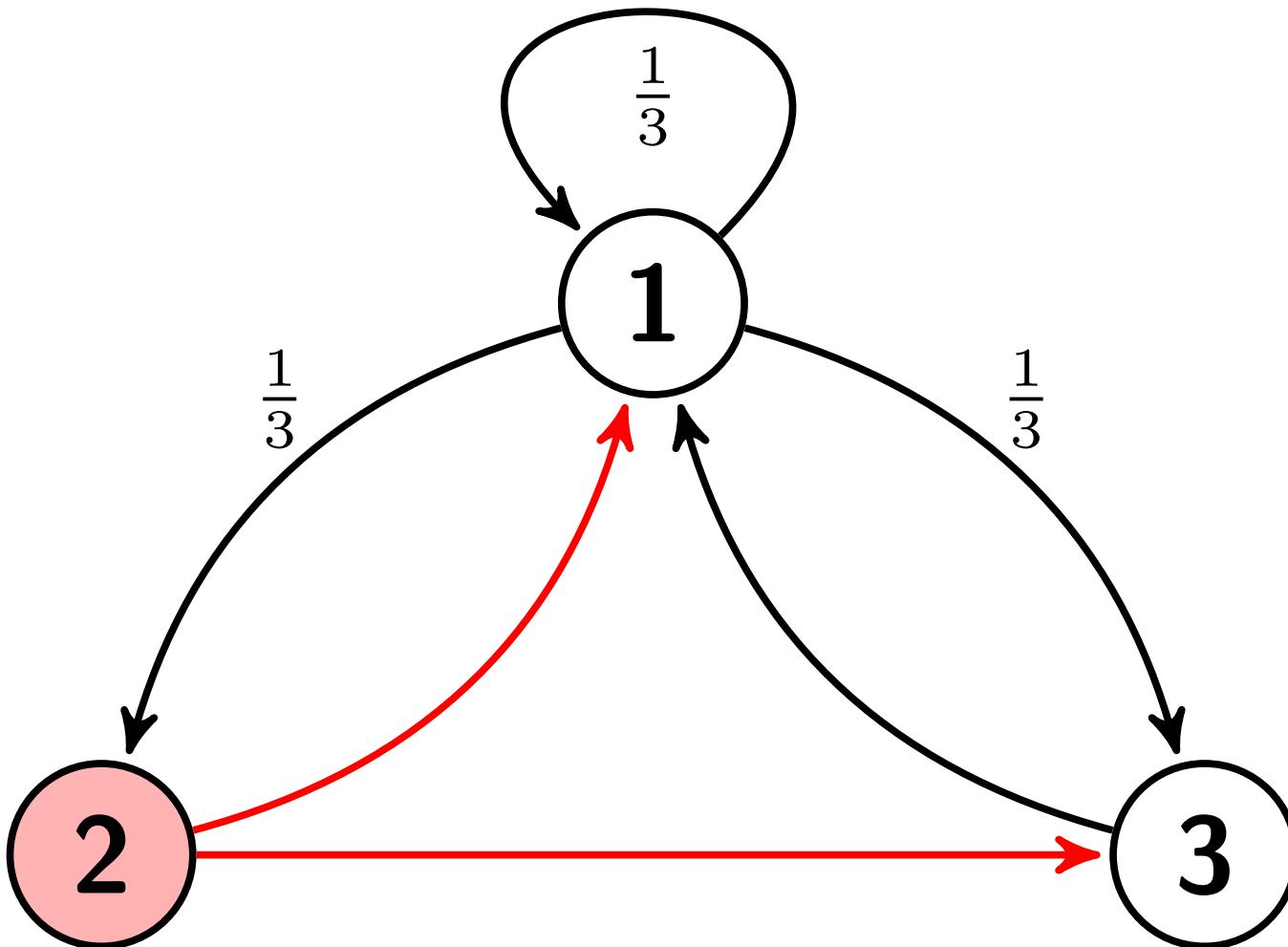
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



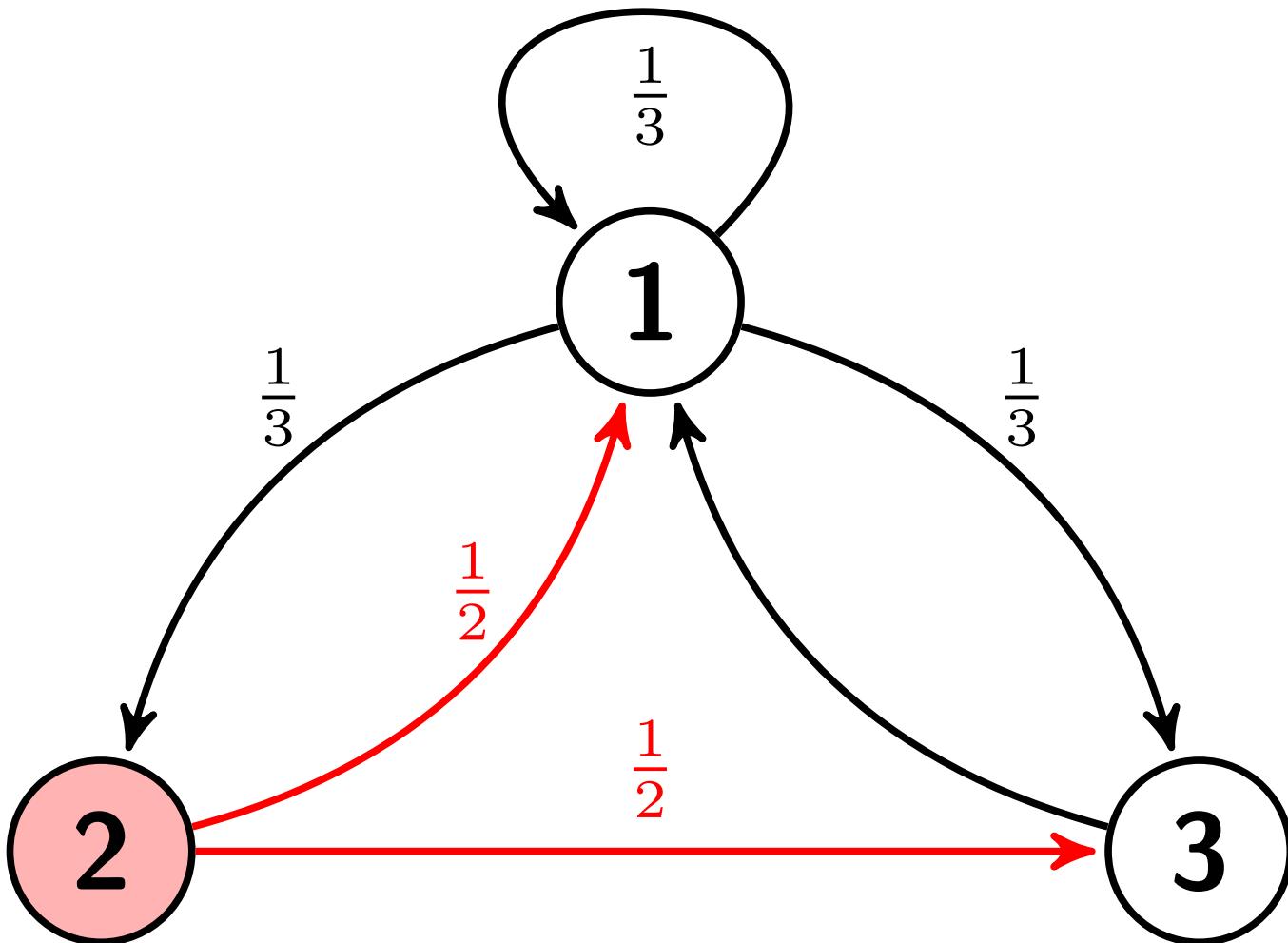
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



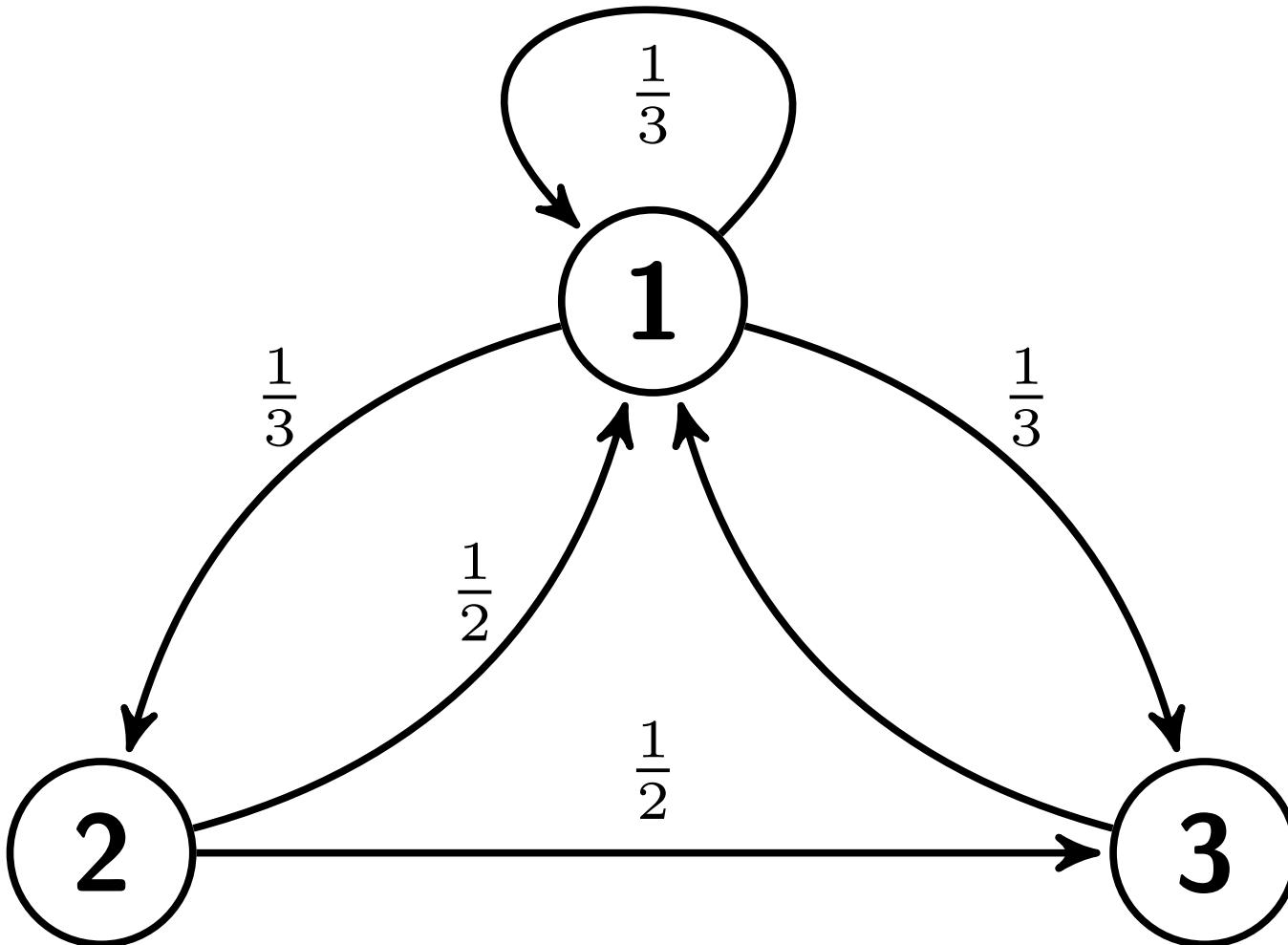
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



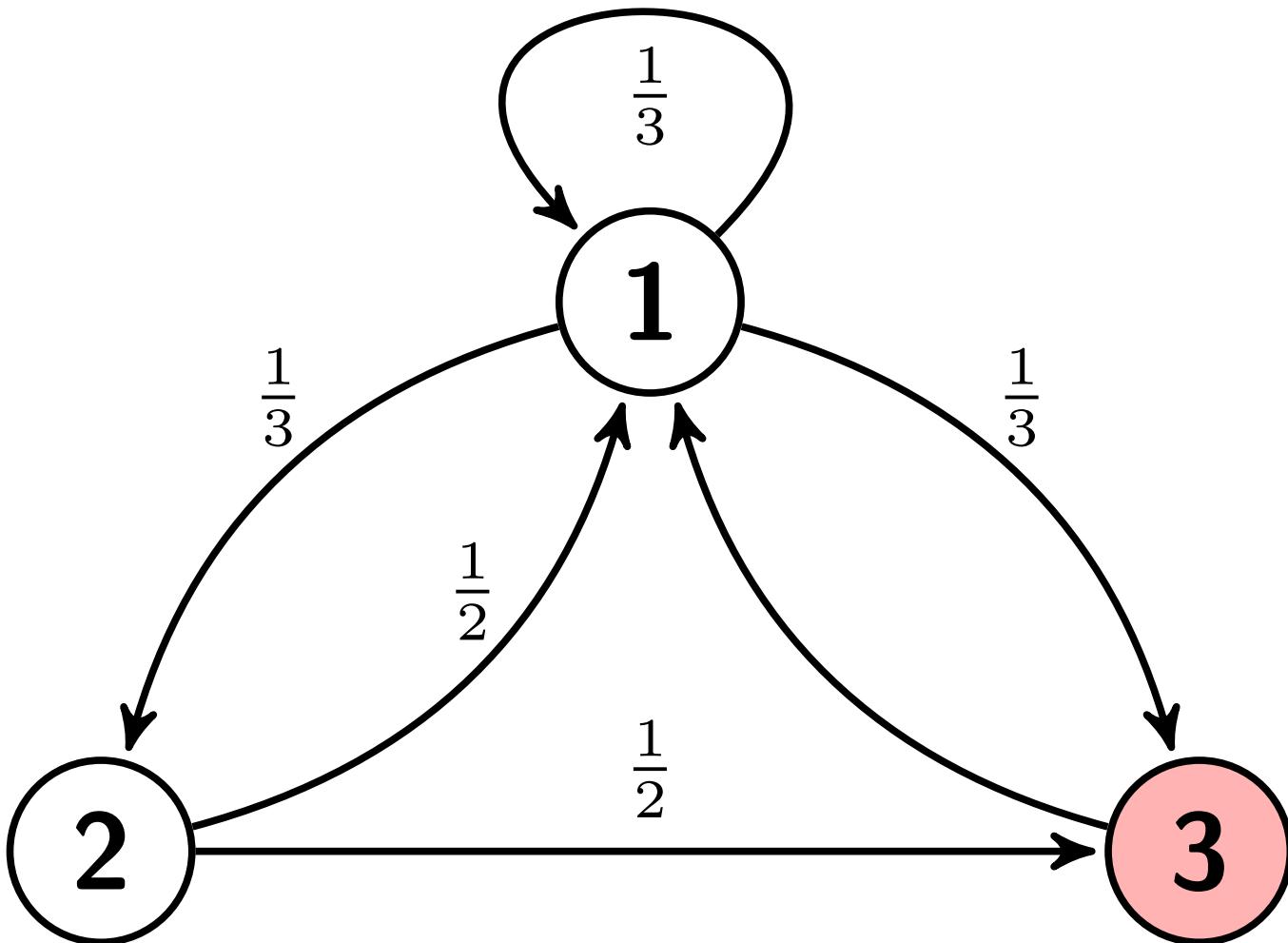
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



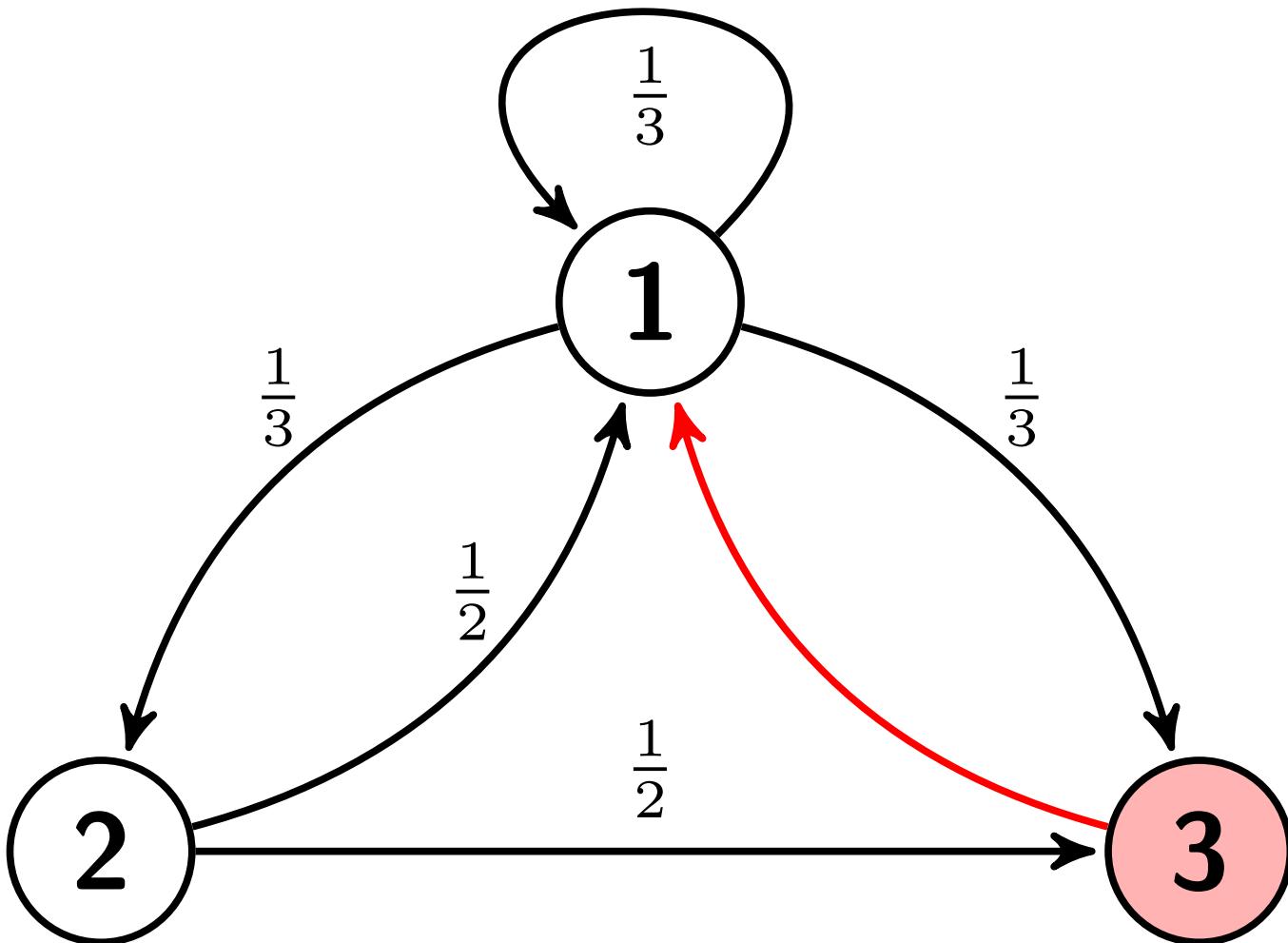
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



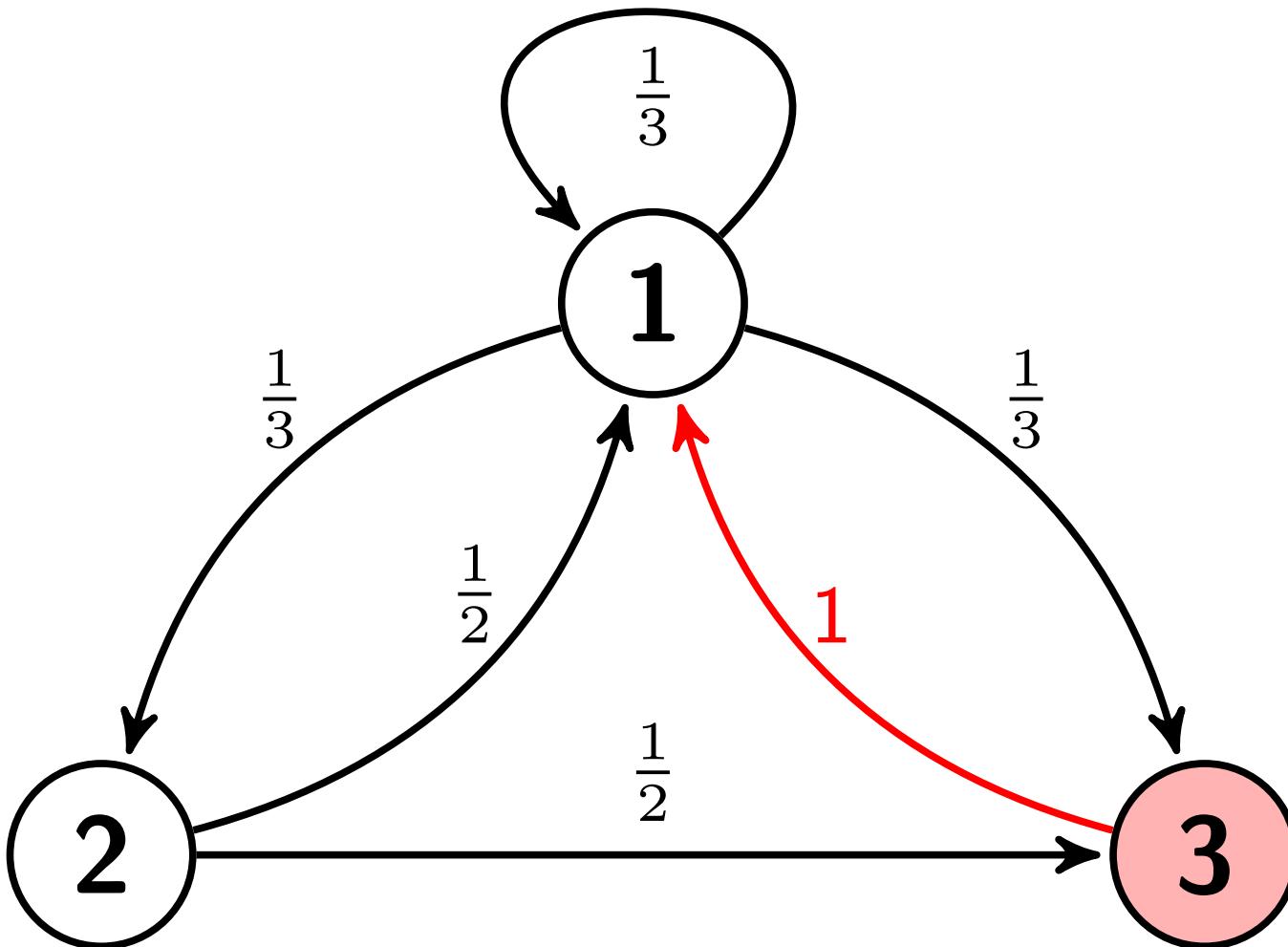
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



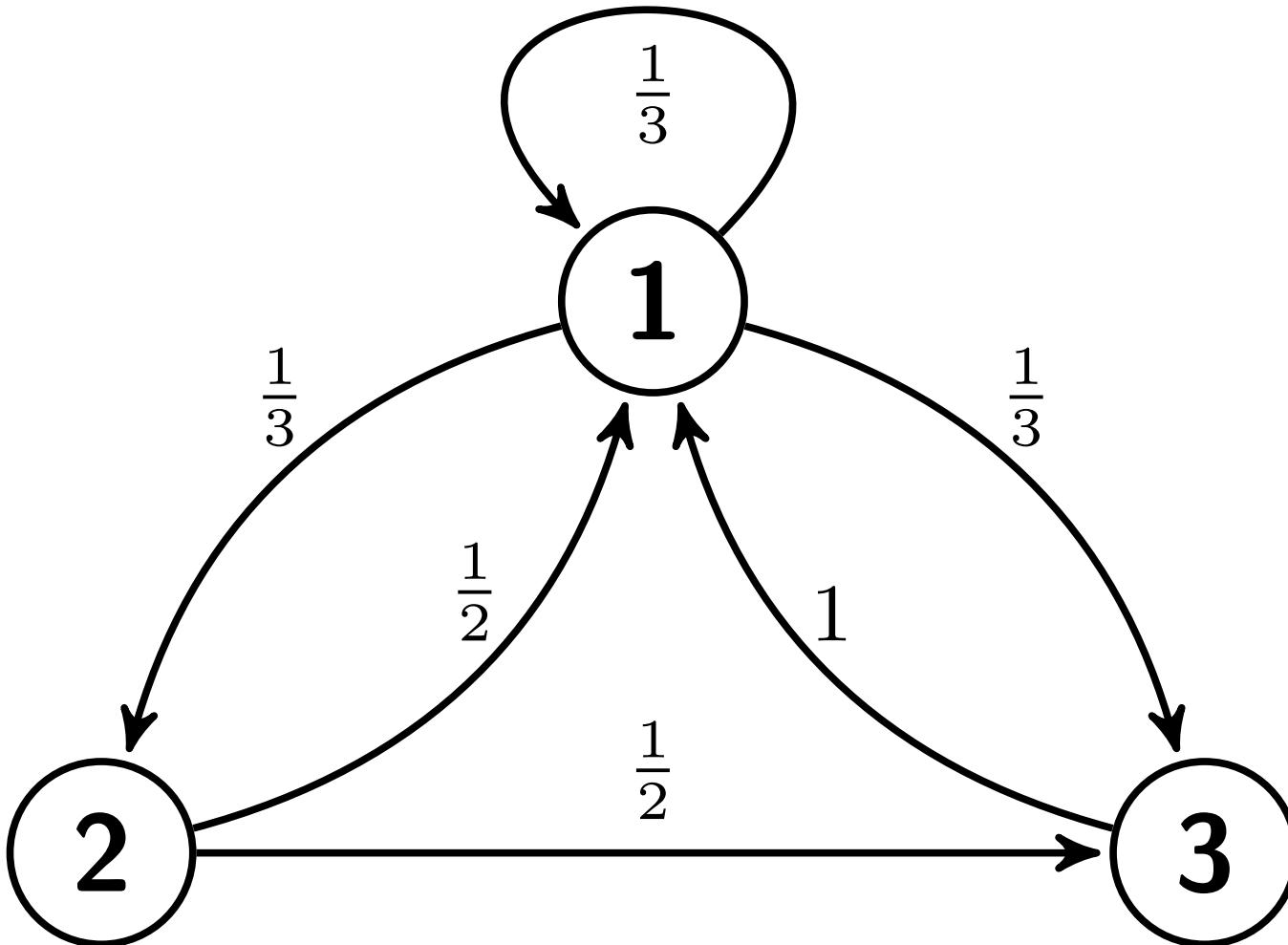
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



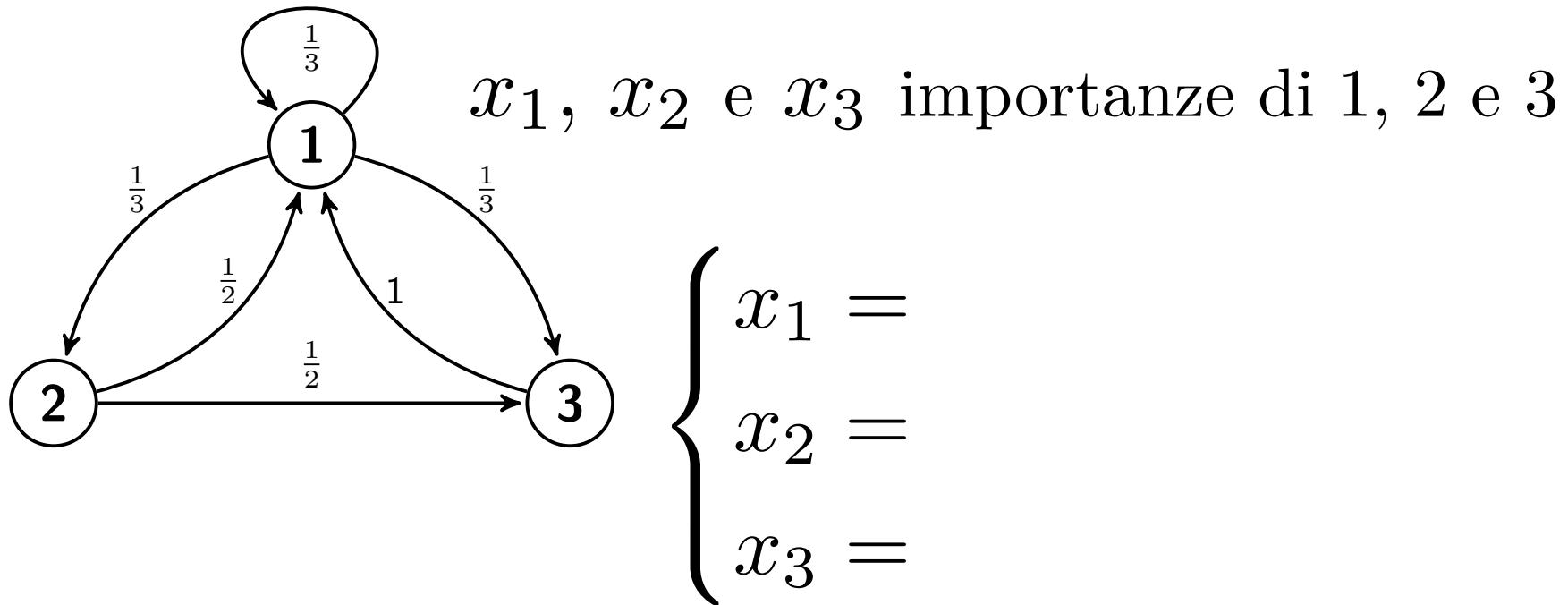
Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE



Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

CALCOLO DELLE IMPORTANZE

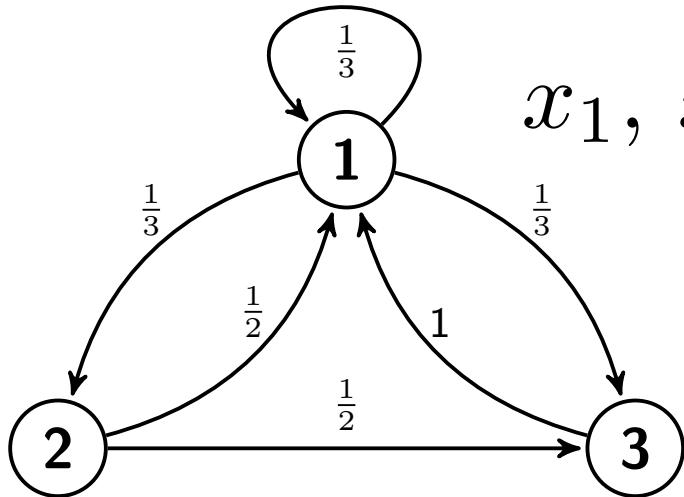


Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

L'importanza di una pagina è la somma della importanze ricevute dalle pagine che la citano



CALCOLO DELLE IMPORTANZE



x_1, x_2 e x_3 importanze di 1, 2 e 3

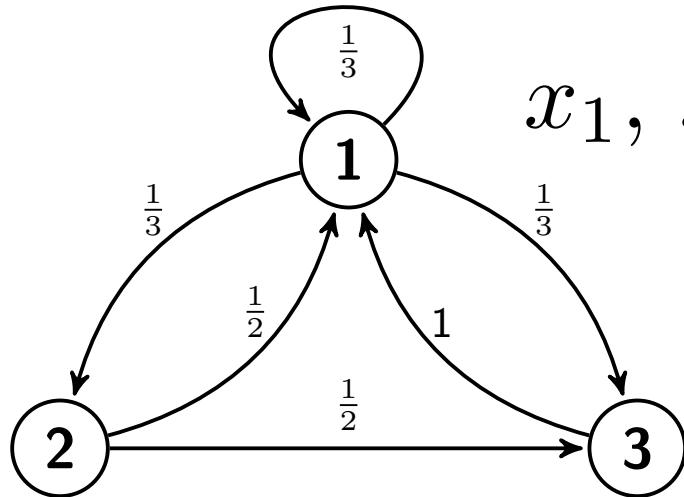
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2 = \\ x_3 = \end{array} \right.$$

Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

L'importanza di una pagina è la somma della importanze ricevute dalle pagine che la citano



CALCOLO DELLE IMPORTANZE



x_1, x_2 e x_3 importanze di 1, 2 e 3

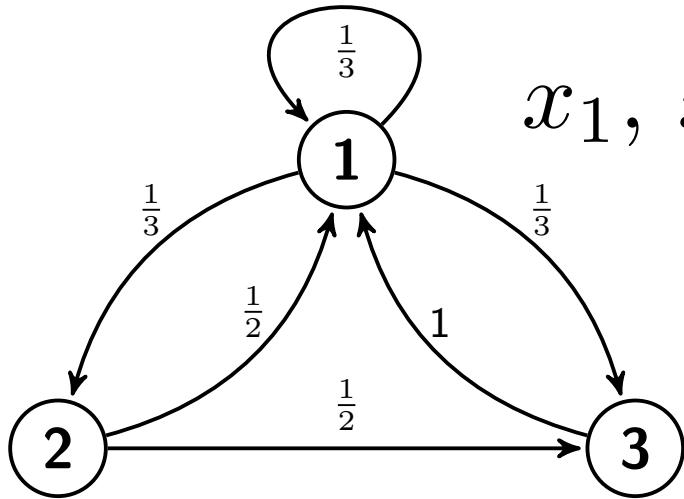
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_3 = \end{array} \right.$$

Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

L'importanza di una pagina è la somma della importanze ricevute dalle pagine che la citano



CALCOLO DELLE IMPORTANZE



x_1, x_2 e x_3 importanze di 1, 2 e 3

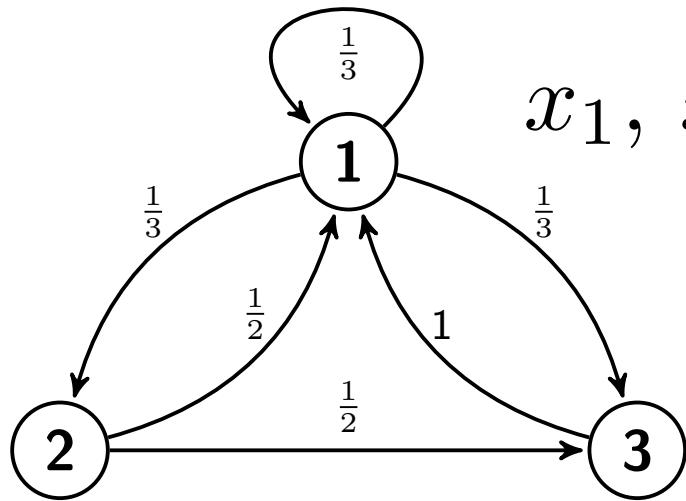
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{array} \right.$$

Una pagina che punta ad altre pagine distribuisce la sua importanza in parti uguali a tali pagine

L'importanza di una pagina è la somma della importanze ricevute dalle pagine che la citano



CALCOLO DELLE IMPORTANZE



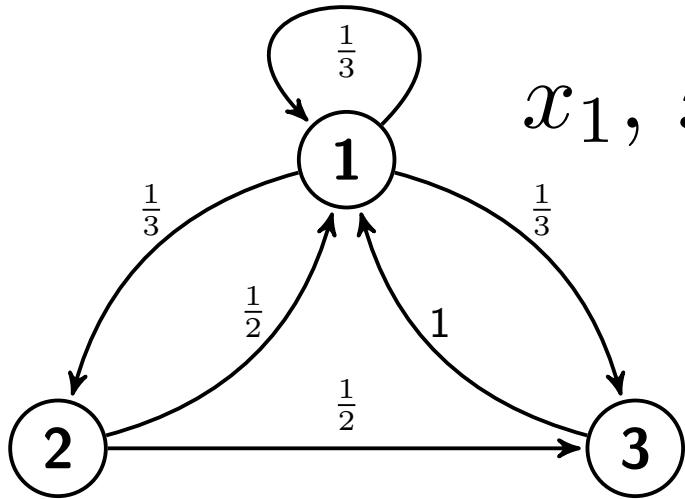
x_1, x_2 e x_3 importanze di 1, 2 e 3

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{array} \right.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$



CALCOLO DELLE IMPORTANZE

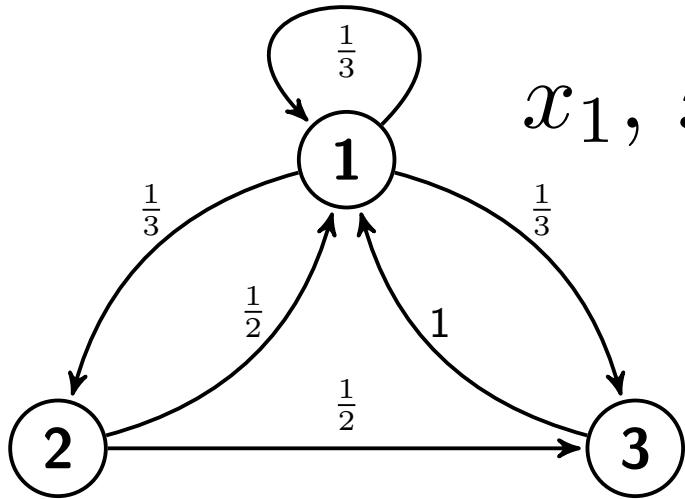


x_1, x_2 e x_3 importanze di 1, 2 e 3

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right.$$



CALCOLO DELLE IMPORTANZE



x_1, x_2 e x_3 importanze di 1, 2 e 3

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{6}{11} = 0.54\dots \\ x_2 = \frac{2}{11} = 0.18\dots \\ x_3 = \frac{3}{11} = 0.27\dots \end{array} \right.$$



E LE IMPORTANZE DI TUTTE LE PAGINE WEB?

SISTEMA DI N EQUAZIONI IN N INCOGNITE

N è dell'ordine dei MILIARDI!



E LE IMPORTANZE DI TUTTE LE PAGINE WEB?

SISTEMA DI N EQUAZIONI IN N INCognite

N è dell'ordine dei MILIARDI!

Problema 1.

Il sistema ha (sempre) soluzione?

Problema 2.

Se sì, riusciamo a calcolarla?



IL SISTEMA HA (SEMPRE) SOLUZIONE?



IL SISTEMA HA (SEMPRE) SOLUZIONE? SI! TEOREMA DI PERRON-FROBENIUS (1907)



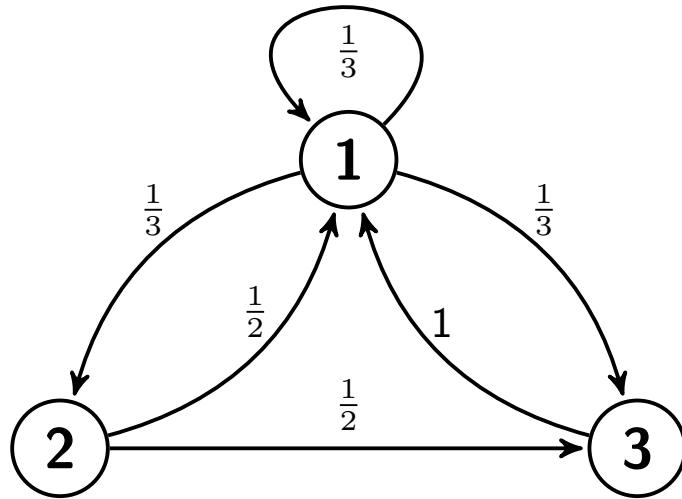
Oskar Perron



Ferdinand Georg Frobenius



CALCOLO DELLE IMPORTANZE

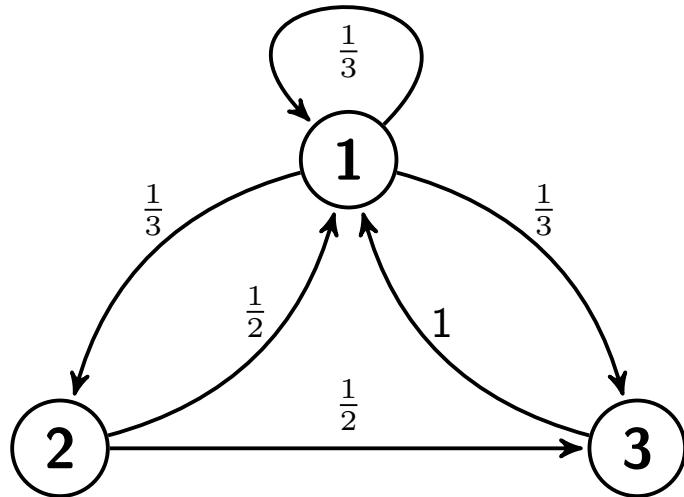


$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array} \right)$$



CALCOLO DELLE IMPORTANZE

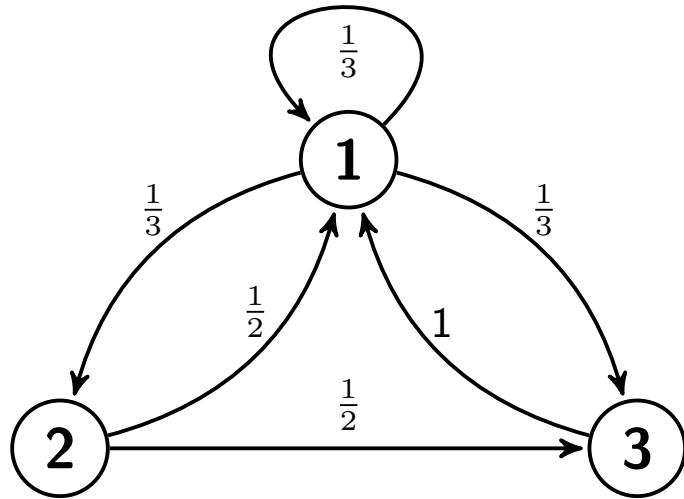


$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{2} & 1 \\ & 0 & 0 \\ & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$



CALCOLO DELLE IMPORTANZE



$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$



RIUSCIAMO A CALCOLARE LA SOLUZIONE?



RIUSCIAMO A CALCOLARE LA SOLUZIONE? SI! METODO DELLE POTENZE (1929)



Richard von Mises



Google

